1. Montrez explicitement qu'il n'y a pas d'états propres de l'opérateur de création $a^\dagger$.

   Supposons qu'un tel état propre existe, c'est-à-dire que $a^\dagger|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle$. On développe $|\beta\rangle$ sur les états nombres :

   $$|\beta\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$$
   $$\Rightarrow a^\dagger|\beta\rangle = \beta\sum_n c_n|n\rangle = \sum_n c_n\sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

   Les états nombres étant orthogonaux, la relation ci-dessus doit être vérifié pour chaque n :

   $$\beta c_{n+1} = c_n\sqrt{n+1} \text{ si } n \geq 1, \quad c_0 = 0.$$

   Par récurrence, tous les c_n sont nuls.

2. Soit l'opérateur $h = e^{i\phi} = \dfrac{1}{\sqrt{N+1}}a$ introduit dans le problème 6 de la série 3. Trouvez ses états propres $|z\rangle$, de valeur propre z, en termes des états nombres. Y a-t-il une restriction sur les valeurs que peut prendre $|z|$?

   On écrit $|z\rangle = \sum_n c_n|n\rangle$.

   $h|z\rangle = z|z\rangle = \sum_n zc_n|n\rangle$, mais aussi

   $$h|z\rangle = \frac{1}{\sqrt{N+1}}a|z\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{\sqrt{N+1}}\sqrt{n}|n-1\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{\sqrt{n}}\sqrt{n}|n-1\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}c_n|n-1\rangle = \sum_n c_{n+1}|n\rangle$$

   On en tire que $c_{n+1} = zc_n = z^2c_{n-1} = \cdots = z^{n+1}c_0$, de telle sorte que

   $$|z\rangle = \sum_n c_0 z^n|n\rangle.$$

   Pour que $|z\rangle$ soit normalisable, il faut que $|z| < 1$, et alors

   $$1 = \langle z|z\rangle = |c_0|^2\sum_n |z|^{2n} = \frac{|c_0|^2}{1-|z|^2} \quad \Rightarrow \quad c_0 = \sqrt{1-|z|^2}.$$

   Il suit que

   $$|z\rangle = \sqrt{1-|z|^2}\sum_n z^n|n\rangle, \quad |z| < 1.$$

3. <u>« Lumière comprimée »</u> (voir D2T1C2A)

Note : On se limite dans ce problème au cas monomode. Les indices seront omis.

Soient les opérateurs Q et P définis par :

$Q = a^\dagger + a$ (partie réelle de l'amplitude)
$P = i\left(a^\dagger - a\right)$ (partie imaginaire)

a) Montrez que $[Q,P] = 2i$. Que peut-on en conclure sur $\Delta Q \Delta P$?

$$[Q,P] = i\left[\left(a^\dagger + a\right)\left(a^\dagger - a\right) - \left(a^\dagger - a\right)\left(a^\dagger + a\right)\right] = 2i\left[a, a^\dagger\right] = 2i$$
$$\Rightarrow (\Delta Q)^2 (\Delta P)^2 \geq \frac{1}{4}\langle i[Q,P]\rangle = 1 \;\Rightarrow\; \Delta Q \Delta P \geq 1$$

b) Que valent ΔQ et ΔP dans le cas d'un état cohérent?

$$\langle Q\rangle = \langle\alpha|Q|\alpha\rangle = \langle\alpha|a^\dagger + a|\alpha\rangle = \alpha + \alpha^*$$
$$Q^2 = \left(a^\dagger + a\right)\left(a^\dagger + a\right) = a^{\dagger 2} + a^2 + a^\dagger a + a a^\dagger = a^{\dagger 2} + a^2 + 2a^\dagger a + 1$$
$$\left\langle Q^2\right\rangle = \alpha^{*2} + \alpha^2 + 2\alpha\alpha^* + 1$$
$$(\Delta Q)^2 = \left\langle Q^2\right\rangle - \langle Q\rangle^2 = 1 \;\Rightarrow\; \Delta Q = 1$$

Un développement similaire mène à $\Delta P = 1$.

c) Écrivez l'opérateur champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ en termes de Q et P.

Compte tenu des définitions de Q et P, on a

$a = (Q + iP)/2$ et $a^\dagger = (Q - iP)/2$

Il suit que

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\perp &= \xi\mathbf{e}\left(a e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} - a^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}\right)\\ &= \frac{\xi}{2}\mathbf{e}\left[(Q + iP)e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} - (Q - iP)e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}\right]\\ &= \xi'\mathbf{e}\left(Q\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t) + P\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\right)\end{aligned}$$

où ξ, ξ' sont des constantes.

Soit maintenant l'opérateur de « compression » $S(R)$:

$$S(R) = \exp\left\{\frac{1}{2}R\left(a^2 - a^{\dagger 2}\right)\right\},$$

où R est un nombre réel, et des opérateurs de pseudo-annihilation et pseudo–création :

$$A(R) = SaS^\dagger = \mu a + \nu a^\dagger \ , \quad A^\dagger(R) = Sa^\dagger S^\dagger = \mu^* a^\dagger + \nu^* a \ .$$

d) Trouvez des expressions pour μ et ν.

On utilise le lemme de Baker-Hausdorf : $e^{x\hat{A}}\hat{B}e^{-x\hat{A}} = \hat{B} + x\left[\hat{A},\hat{B}\right] + \frac{x^2}{2}\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right] + \ldots$

Ici, $x \to R$, $A \to \left(a^2 - a^{\dagger 2}\right)/2$ et $B \to a$.

$$\left[A,a\right] = \frac{1}{2}\left[a^2 - a^{\dagger 2}, a\right] = -\frac{1}{2}\left(a^\dagger a^\dagger a - aa^\dagger a^\dagger\right) = a^\dagger \text{ et}$$
$$\left[A,a^\dagger\right] = \frac{1}{2}\left[a^2 - a^{\dagger 2}, a^\dagger\right] = \frac{1}{2}\left(aaa^\dagger - a^\dagger aa\right) = a$$

Par suite,

$$\begin{aligned} A = SaS^\dagger &= a + Ra^\dagger + \frac{R^2}{2!}a + \frac{R^3}{3!}a^\dagger + \ldots \\ &= a\cosh R + a^\dagger \sinh R \\ A^\dagger &= a\sinh R + a^\dagger \cosh R \end{aligned}$$

e) Que vaut le commutateur $\left[A,A^\dagger\right]$?

$$\begin{aligned} \left[A,A^\dagger\right] &= \left(a\cosh R + a^\dagger \sinh R\right)\left(a\sinh R + a^\dagger \cosh R\right) - \left(a\sinh R + a^\dagger \cosh R\right)\left(a\cosh R + a^\dagger \sinh R\right) \\ &= \left(aa^\dagger - a^\dagger a\right)\cosh^2 R + \left(a^\dagger a - aa^\dagger\right)\sinh^2 R \\ &= \cosh^2 R - \sinh^2 R \\ &= 1 \end{aligned}$$

Introduisons maintenant les états comprimés :

$$\left|\left[R,\alpha\right]\right\rangle = S(R)\left|\alpha\right\rangle$$

f) Montrez que $A(R)\left|\left[R,\alpha\right]\right\rangle = \alpha\left|\left[R,\alpha\right]\right\rangle$

$$A|R,\alpha\rangle = AS|\alpha\rangle = SaS^{\dagger}S|\alpha\rangle = Sa|\alpha\rangle = S\alpha|\alpha\rangle = \alpha|R,\alpha\rangle$$

g) Trouvez des expressions pour $\left\langle(\Delta Q)^2\right\rangle$ et $\left\langle(\Delta P)^2\right\rangle$ pour l'état comprim ΔP é $|[R,\alpha]\rangle$. Interprétez votre résultat.

À partir des définitions de A et $A^{\dagger}$, on obtient

$$\mu A - \nu A^{\dagger} = \left(\mu^2 - \nu^2\right)a = a$$
$$\mu A^{\dagger} - \nu A = a^{\dagger}$$

$$\langle Q\rangle = \langle R,\alpha|a + a^{\dagger}|R,\alpha\rangle = \langle R,\alpha|(\mu-\nu)\left(A + A^{\dagger}\right)|R,\alpha\rangle = (\mu-\nu)\left(\alpha + \alpha^*\right)$$
$$\left\langle Q^2\right\rangle = (\mu-\nu)^2\left(\alpha^2 + \alpha^{*2} + 2\alpha^* + 1\right)$$
$$(\Delta Q)^2 = \left\langle Q^2\right\rangle - \langle Q\rangle^2 = (\mu-\nu)^2 = e^{-2R}$$

Un développement similaire donne $(\Delta P)^2 = e^{2R}$.

Ainsi, on a encore que $\Delta Q \Delta P = 1$, mais ΔQ peut être nettement plus petit ou plus grand que ΔP selon la valeur de R. Or, l'état du vide est un état cohérent de valeur propre 0! Si on « comprime » le vide, les fluctuations de ΔQ ou ΔP peuvent alors être nettement plus petites que celles du vide « ordinaire ». Si on ne mesure que Q ou P, on pourra en principe faire des mesures de plus grande précision.

Pour votre information : l'opérateur de compression est écrit en termes de a^2 et $a^{\dagger 2}$. C'est donc un opérateur « à deux photons ». C'est pourquoi tous les schémas expérimentaux pour réaliser des états comprimés impliquent des effets dans des cristaux non linéaires.