1. Soit un mode précis du champ électromagnétique de fréquence ω qui se propage selon l'axe *z* et est polarisé selon l'axe *x.*

   a) Calculez le commutateur $\left[\hat{N},\hat{E}_x\right]$. Déduisez-en une expression pour $\Delta\hat{N}\Delta\hat{E}_x$.

   b) Supposons que le vecteur d'état du champ associé à ce mode s'écrive au temps $t=0$ $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|n\rangle + e^{i\phi}|n+1\rangle\right)$, où ϕ est une phase.
   Trouvez une expression pour $|\psi(t)\rangle$.

   c) Vérifiez que la relation d'incertitude trouvée en a) est satisfaite pour l'état $|\psi(t)\rangle$ obtenu en b).

2. Soit le vecteur d'état associé à un mode particulier du champ électromagnétique :

   $$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |10\rangle\right).$$

   a) Obtenez la valeur moyenne du nombre de photons $\langle\hat{N}\rangle$ pour cet état.

   b) Supposons qu'on absorbe un photon. Que vaut maintenant $\langle\hat{N}\rangle$?

3. <u>Opérateur moment cinétique</u>.

   Soit la partie intrinsèque du moment cinétique classique $\mathbf{J}^S$ dont vous avez obtenu une expression dans la série d'exercices no. 2. Faites la transposition des variables normales en opérateurs dans la base de polarisation circulaire. Montrez que

   $$\hat{\mathbf{J}}^S = \sum_n \hbar \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\left(\hat{N}_{n+} - \hat{N}_{n-}\right),$$

   où les indices + et – se réfèrent aux deux polarisations circulaires. Interprétez votre résultat.

4. <u>Lemme de Baker-Hausdorf</u>.

   Montrez que

   $$e^{x\hat{A}}\hat{B}e^{-x\hat{A}} \cong \hat{B} + x\left[\hat{A},\hat{B}\right] + \frac{x^2}{2}\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right].$$

   Truc : posez $f(x) = e^{x\hat{A}}\hat{B}e^{-x\hat{A}}$ et faites le développement en série de Taylor.

5. <u>Théorème de Campbell-Baker-Hausdorf</u>

Soient $\hat{A}$ et $\hat{B}$ deux opérateurs tels que $\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right]=\left[\hat{B},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right]=0$ et soit $\hat{C}=e^{x\hat{A}}e^{x\hat{B}}$.

a) Montrez que

$$\frac{\mathrm{d}\hat{C}}{\mathrm{d}x}=\left\{\hat{A}+\hat{B}+x\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right\}\hat{C}=\hat{C}\left\{\hat{A}+\hat{B}+x\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right\}.$$

b) Il suit de a) qu'on peut intégrer l'équation différentielle par rapport à x comme s'il s'agissait d'une équation ordinaire. Déduisez-en le théorème de Campbell-Baker-Hausdorf :

$$e^{x\left(\hat{A}+\hat{B}\right)}=e^{x\hat{A}}e^{x\hat{B}}e^{-x^2\left[\hat{A},\hat{B}\right]/2}=e^{x\hat{B}}e^{x\hat{A}}e^{x^2\left[\hat{A},\hat{B}\right]/2}.$$

6. <u>Opérateur « phase »</u>

Comme les variables normales sont complexes, on peut écrire $\alpha=|\alpha|e^{i\phi}$. Par anologie, on peut écrire $a=\hat{g}e^{i\hat{\phi}}$, où $\hat{\phi}$ correspond à un « opérateur phase ». *Supposons* que $\hat{g}$ et $\hat{\phi}$ soient des opérateurs hermitiques. Il suit que $\hat{h}=e^{i\hat{\phi}}$ est un opérateur unitaire[1].

a) Montrez que $\hat{g}=\sqrt{\hat{N}+1}$. L'opérateur $\hat{g}$ est donc effectivement hermitique.

b) Montrez que $\left[\hat{N},\hat{h}\right]=-\hat{h}$.

c) Utilisez le lemme de Baker-Hausdorf pour en déduire que $\left[\hat{N},\hat{\phi}\right]=i$. Que peut-on dire de $\Delta\hat{N}\Delta\hat{\phi}$?

d) Montrez que $\langle 0|\hat{h}\hat{h}^{\dagger}|0\rangle=1$ mais que $\langle 0|\hat{h}^{\dagger}\hat{h}|0\rangle=0$. En conséquence, $\hat{h}$ *n'est pas unitaire* et, par suite, $\hat{\phi}$ *n'est pas hermitique!* Nous verrons en cours comment définir des opérateurs qui mesurent la phase.

---

[1] Rappel : un opérateur $\hat{U}$ est unitaire si son inverse est égal à son adjoint : $\hat{U}^{-1}=\hat{U}^{\dagger}$. Par suite, $\hat{U}^{\dagger}\hat{U}=\hat{U}\hat{U}^{\dagger}=\hat{I}$. De toute évidence, si $\hat{A}$ est un opérateur hermitique, $e^{i\hat{A}}$ est un opérateur unitaire.