1. Moment cinétique classique

Le moment cinétique classique du champ transverse s'écrit

$$\mathbf{J}_{\text{trans}} = \varepsilon_0 \int \mathrm{d}^3 r \; \mathbf{r} \times \left(\mathbf{E}_\perp \times \mathbf{B} \right) .$$

Après quelques laborieuses manipulations mathématiques sans intérêt (voir Jackson ou Mandel et Wolf), cette équation se transforme en

$$\mathbf{J}_{\text{trans}} = \varepsilon_0 \int \mathrm{d}^3 r \left\{ \sum_i E_{\perp i} \left(\mathbf{r} \times \nabla \right) A_{\perp i} + \mathbf{E}_\perp \times \mathbf{A}_\perp \right\} , \; i = x, y, z$$

Le premier terme à droite est analogue à un moment cinétique orbital alors que le second est intrinsèque au champ de rayonnement. Dans ce qui suit, on ne s'intéresse qu'à ce deuxième terme :

$$\mathbf{J}^S = \varepsilon_0 \int d^3 r \; \mathbf{E}_\perp \times \mathbf{A}_\perp .$$

a) Exprimez $\mathbf{J}^S$ en termes des variables normales α_{ns} et α_{ns}^*. Note : on doit avoir $\hat{e}_{\overline{n}s} = \hat{e}_{ns}^*$.

La relation de Parseval-Plancherel permet d'écrire, dans l'espace réciproque,

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}^S &= \frac{\varepsilon_0}{L^3} \sum_n \sum_{ss'} \vec{\mathcal{E}}_{\perp ns}^* \times \vec{\mathcal{A}}_{\perp ns'} \\
&= \frac{\varepsilon_0}{L^3} \sum_n \sum_{ss'} (-i) \left[C_n \hat{e}_{ns}^* \alpha_{ns}^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \text{ c.c.} \right] \times \left[\frac{C_n}{\omega_n} \hat{e}_{ns'} \alpha_{ns'} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \text{ c.c.} \right] \\
&= \frac{i\varepsilon_0}{L^3} \sum_n \sum_{ss'} \frac{C_n^2}{\omega_n} \left[\left(\alpha_{ns} \alpha_{ns'}^* \hat{e}_{ns} \times \hat{e}_{ns'}^* + \alpha_{ns} \alpha_{ns'} \hat{e}_{ns} \times \hat{e}_{ns'} e^{2i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right) - \text{ c.c.} \right]
\end{aligned}$$

Les termes qui comportent $e^{2i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ s'annulent dans la sommation puisque $\alpha_{\overline{n}s} = \alpha_{ns}^*$. Il suit que

$$\mathbf{J}^S = \frac{i\varepsilon_0}{L^3} \sum_n \sum_{ss'} \frac{C_n^2}{\omega_n} \left(\alpha_{ns} \alpha_{ns'}^* \hat{e}_{ns} \times \hat{e}_{ns'}^* - \text{ c.c.} \right) .$$

b) Simplifiez cette expression en utilisant une base de polarisation circulaire

$$\hat{e}_{n+} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\hat{e}_{n1} + i \hat{e}_{n2} \right) , \; \hat{e}_{n-} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(i \hat{e}_{n1} + \hat{e}_{n2} \right)$$

$$\hat{e}_{n+} \times \hat{e}^*_{n+} = -i\hat{e}_{n1} \times \hat{e}_{n2} = -i\hat{k}_n \ ; \ \hat{e}_{n-} \times \hat{e}^*_{n-} = i\hat{k}_n \ ; \ \hat{e}_{n+} \times \hat{e}^*_{n-} = \hat{e}_{n-} \times \hat{e}^*_{n+} = 0 .$$

On peut donc écrire $\hat{e}_{n\lambda} \times \hat{e}^*_{n\lambda'} = -i\lambda\hat{k}_n\delta_{\lambda\lambda'}$, $\lambda = \pm 1$, d'où

$$\mathbf{J}^S = \frac{\varepsilon_0}{L^3}\sum_{n\lambda}\frac{C_n^2}{\omega_n}\lambda\hat{k}_n\left(\alpha_{n\lambda}\alpha^*_{n\lambda} + \text{ c.c.}\right)$$

2. Soient A et B deux observables telles que $[A,B] = C$ et soit l'écart quadratique $\Delta A = \sqrt{\left\langle \left(A - \langle A\rangle\right)^2 \right\rangle}$, où $\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$. Montrez qu'alors

$$(\Delta A)^2(\Delta B)^2 \geq \frac{1}{4}\langle iC\rangle^2 .$$

<u>Solution</u>

On commence par introduire trois nouveaux opérateurs :

$U = A - \langle A\rangle$, $V = B - \langle B\rangle$, $P = U + i\lambda V$, où λ est un paramètre à déterminer.

Soit $|\phi\rangle = P|\psi\rangle$. Il suit que $\langle\phi|\phi\rangle = \langle\psi|P^\dagger P|\psi\rangle = \langle\psi|U^2|\psi\rangle + \langle\psi|\lambda^2 V^2|\psi\rangle + i\lambda\langle[U,V]\rangle$.

Mais $[U,V] = [A,B] = C$, de telle sorte que $\langle\phi|\phi\rangle = \langle U^2\rangle + \lambda^2\langle V^2\rangle + i\lambda\langle C\rangle$. Or, $\langle\phi|\phi\rangle \geq 0$.
Trouvons son minimum par rapport à λ :

$$\frac{\mathrm{d}\langle\phi|\phi\rangle}{\mathrm{d}\lambda} = 0 \ \Rightarrow \ 2\lambda\langle V^2\rangle + i\langle C\rangle = 0 \ \Rightarrow \ \lambda_{\min} = \frac{-i\langle C\rangle}{2\langle V^2\rangle} .$$

Par suite,

$$\langle\phi|\phi\rangle_{\min} = \langle U^2\rangle + \frac{\left(i\langle C\rangle\right)^2}{4\langle V^2\rangle} - \frac{\left(i\langle C\rangle\right)^2}{2\langle V^2\rangle} \geq 0 ,$$

de telle sorte que

$$\langle U^2\rangle\langle V^2\rangle = (\Delta A)^2(\Delta B)^2 \geq \frac{1}{4}\langle iC\rangle^2 .$$