1. Moment cinétique classique

   Le moment cinétique classique du champ transverse s'écrit

   $$\mathbf{J}_{\text{trans}} = \varepsilon_0 \int \mathrm{d}^3 r \; \mathbf{r} \times \left(\mathbf{E}_\perp \times \mathbf{B} \right) \; .$$

   Après quelques laborieuses manipulations mathématiques sans intérêt (voir Jackson ou Mandel et Wolf), cette équation se transforme en

   $$\mathbf{J}_{\text{trans}} = \varepsilon_0 \int \mathrm{d}^3 r \left\{ \sum_i E_{\perp i} \left(\mathbf{r} \times \nabla \right) A_{\perp i} + \mathbf{E}_\perp \times \mathbf{A}_\perp \right\} \; , \; i = x, y, z$$

   Le premier terme à droite est analogue à un moment cinétique orbital alors que le second est intrinsèque au champ de rayonnement. Dans ce qui suit, on ne s'intéresse qu'à ce deuxième terme :

   $$\mathbf{J}^S = \varepsilon_0 \int d^3 r \; \mathbf{E}_\perp \times \mathbf{A}_\perp \; .$$

   a) Exprimez $\mathbf{J}^S$ en termes des variables normales α_{ns} et α_{ns}^*. Note : dans le cas d'une base de polarisation linéaire, on peut poser $\hat{e}_{\overline{n}s} = \hat{e}_{ns}^* = \hat{e}_{ns}$.

   b) Simplifiez cette expression en utilisant une base de polarisation circulaire

   $$\hat{e}_{n+} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\hat{e}_{n1} + i \hat{e}_{n2} \right) \; , \; \hat{e}_{n-} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(i \hat{e}_{n1} + \hat{e}_{n2} \right)$$

2. Soient A et B deux observables telles que $[A, B] = C$ et soit l'écart quadratique $\Delta A = \sqrt{\left\langle \left(A - \langle A \rangle \right)^2 \right\rangle}$, où $\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$. Montrez qu'alors

   $$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \frac{1}{4} \langle iC \rangle^2 \; .$$

3. Relisez les pages de votre livre de mécanique quantique préféré à propos des opérateurs d'annihilation ou de création de quanta d'énergie a et $a^\dagger$ tels que $\left[a, a^\dagger \right] = 1$, et de l'opérateur nombre $N = a^\dagger a$: propriétés, spectre, valeurs propres, …