1. À partir de la densité lagrangienne du champ électromagnétique et des équations d'Euler-Lagrange, obtenez la quatrième équation de Maxwell.

Solution :

Note : on utilise dans ce qui suit la notation $\partial_\alpha \equiv \dfrac{\partial}{\partial \alpha}$, $\alpha = x,\ y,\ z$ ou t

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left|\dot{\mathbf{A}} + \nabla V\right|^2 - \frac{\varepsilon_0 c^2}{2}\left|\nabla \times \mathbf{A}\right|^2 - \rho V + \mathbf{J}\cdot\mathbf{A}.$$

Prenons le champ A_x. Les équations d'Euler-Lagrange donnent :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_x} - \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{x,x}} - \partial_y \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{x,y}} - \partial_z \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{x,z}} - \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_x} = 0.$$

i. $\left|\dot{\mathbf{A}} + \nabla V\right|^2 = \dot{A}_x^2 + \dot{A}_y^2 + \dot{A}_z^2 + 2\dot{A}_x\partial_x V + 2\dot{A}_y\partial_y V + 2\dot{A}_z\partial_z V + \left|\nabla V\right|^2$

ii. $\left|\nabla \times \mathbf{A}\right|^2 = \left(A_{z,y} - A_{y,z}\right)^2 + \left(A_{x,z} - A_{z,x}\right)^2 + \left(A_{y,x} - A_{x,y}\right)^2$

iii. $\mathbf{J}\cdot\mathbf{A} = J_x A_x + J_y A_y + J_z A_z$

Donc,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_x} = J_x;\ \ \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{x,x}} = 0;\ \ \partial_y \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{x,y}} = \varepsilon_0 c^2 \partial_y \left(A_{y,x} - A_{x,y}\right);$$

$$\partial_z \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{x,z}} = -\varepsilon_0 c^2 \partial_z \left(A_{x,z} - A_{z,x}\right);\ \ \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_x} = \varepsilon_0^2 \partial_t \left(\dot{A}_x + \partial_x V\right);$$

Mais $A_{y,x} - A_{x,y} = B_z$, $A_{x,z} - A_{z,x} = B_y$ et $\dot{A}_x + \partial_x V = -E_x$.

Il suit que

$$-\varepsilon_0 \dot{E}_x - \varepsilon_o c^2 \left(B_{y,z} - B_{z,y}\right) = -\varepsilon_0 \dot{E}_x + \varepsilon_o c^2 \left(\nabla \times \mathbf{B}\right)_x = J_x,$$

ce qui se réécrit

$$\left(\nabla \times \mathbf{B}\right)_x = \frac{1}{c^2}\partial_t E_x + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} J_x.$$

En faisant de même pour les champs A_y et A_z, on retombe sur la quatrième équation de Maxwell.

2. Soit un lagrangien L exprimé en termes de coordonnées généralisées complexes $q=\alpha\left(q_1+iq_2\right)$ et $q^*=\alpha\left(q_1^*+iq_2^*\right)$, et des vitesses généralisées $\dot{q}=\alpha\left(\dot{q}_1+i\dot{q}_2\right)$ et $\dot{q}^*=\alpha\left(\dot{q}_1^*+i\dot{q}_2^*\right)$. Comme L doit être réel, on peut l'exprimer sous une forme générale

$$L=A\dot{q}\dot{q}^*+B\left(q^*\dot{q}+q\dot{q}^*\right)+f\left(q,q^*\right).$$

Par commodité, on exige généralement que l'impulsion généralisée p soit également de la forme $p=\alpha(p_1+ip_2)$, où p_1 et p_2 sont les impulsions associées à q_1 et q_2.

Montrez que cela impose $p=\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)^*$ et $\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Solution :

$$q=\alpha\left(q_1+iq_2\right)\Rightarrow \dot{q}=\alpha\left(\dot{q}_1+i\dot{q}_2\right)$$
$$\dot{q}\dot{q}^*=\alpha^2\left(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2\right),\ \ q^*\dot{q}+q\dot{q}^*=2\alpha^2\left(q_1\dot{q}_1+q_2\dot{q}_2\right)$$

Il suit que

$$L=\alpha^2A\left(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2\right)+2\alpha^2B\left(q_1\dot{q}_1+q_2\dot{q}_2\right).$$

Par définition,

$$p_1=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}=2\alpha^2\left(A\dot{q}_1+Bq_1\right) \text{ et } p_2=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}=2\alpha^2\left(A\dot{q}_2+Bq_2\right),$$

dont on tire

$$p=\alpha\left(p_1+ip_2\right)=2\alpha^3\left[A\left(\dot{q}_1+i\dot{q}_2\right)+B\left(q_1+iq_2\right)\right]=2\alpha^2\left(A\dot{q}+Bq\right).$$

D'autre part,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=A\dot{q}^*+Bq^*\neq p.$$

Par contre,

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)^*=p \text{ si on pose } \alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3. Montrez que

$$\frac{1}{4\pi r} = \frac{1}{L^3}\sum_n \frac{\exp\left\{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}\right\}}{k_n^2} \ .$$

Solution :

Il s'agit ici de trouver les $\mathcal{E}_n$ tels que

$$\frac{1}{4\pi r} = \frac{1}{L^3}\sum_n \exp\left\{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}\right\}\mathcal{E}_n \ .$$

La transformation inverse impose

$$\mathcal{E}_n = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathrm{d}^3 r}{r} e^{-i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}} \ .$$

On peut écrire $\int \frac{\mathrm{d}^3 r}{r} e^{-i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}} = \lim_{\alpha \to 0}\int \frac{\mathrm{d}^3 r}{r} e^{-i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}} e^{-\alpha r}$.

Soit $\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r} = k_n r\cos\theta = k_n r u \ \Rightarrow \ \mathrm{d}^3 r = r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = -r^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}u\mathrm{d}\phi$.

Donc,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}^3 r}{r} e^{-i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}} e^{-\alpha r} &= 2\pi \int_0^\infty \left[r e^{-\alpha r} \int_{-1}^{1} e^{-ik_n r u}\, \mathrm{d}u \right] \mathrm{d}r \\
&= \frac{2\pi i}{k_n} \int_0^\infty e^{-\alpha r}\left(e^{-ik_n r} - e^{ik_n r}\right)\mathrm{d}r \\
&= \frac{2\pi i}{k_n}\left[\frac{-1}{-\alpha - ik_n} - \frac{-1}{-\alpha + ik_n}\right] \\
&= \frac{4\pi}{\alpha^2 + k_n^2}
\end{aligned}$$

Il suit que $\boxed{\mathcal{E}_n = \frac{1}{k_n^2}}$ lorsque $\alpha \to 0$.