

Promotion 2003
Année 3
Majeure 2
PHY557A

MAJEURE DE PHYSIQUE

Optique quantique 2 : Photons

Tome 1

Alain Aspect, Philippe Grangier

Édition 2006

Avant propos

Ce cours a pour but d'introduire les notions d'optique quantique relatives au champ électromagnétique quantifié, c'est-à-dire le champ dont les excitations élémentaires sont les photons. Si un usage courant tend parfois à présenter l'optique quantique comme l'optique faite avec les lasers, on a vu dans le cours *Optique quantique 1 : Lasers* que la lumière laser peut être décrite avec une excellente précision comme un champ électromagnétique classique. De nombreux effets peuvent être traités par le modèle *semi classique* de l'interaction matière rayonnement, dans lequel la matière est décrite par le formalisme quantique, alors que le rayonnement est classique. Mais il en existe d'autres, comme *l'émission spontanée* d'un atome isolé, qui ne peuvent être décrits correctement qu'en quantifiant aussi le rayonnement. Depuis le début des années 1980, on a découvert un nombre toujours plus grands d'états du rayonnement – états à un seul photon, états comprimés, paires de photons intriqués – dont les propriétés extraordinaires ne peuvent être comprises que dans le cadre d'une description quantique de la lumière. C'est pour le développement du formalisme permettant de clarifier la compréhension de ces effets, que R. Glauber a reçu le prix Nobel 2005. Ces progrès des années 1980 ont à leur tour stimulé l'émergence d'une discipline nouvelle, l'information quantique. Ce cours permet d'aborder l'ensemble de ces sujets.

Le chapitre 1 peut être considéré comme un rappel d'électrodynamique classique sous une forme adaptée à la quantification. Le chapitre 2 aborde la quantification du rayonnement libre, et de premiers exemples d'états spécifiquement quantiques sont présentés. On montre aussi comment, à l'aide des états quasi-classiques, on peut comprendre les succès de l'électromagnétisme classique. Le chapitre 3 présente le traitement complètement quantique de l'interaction atome-rayonnement ; le formalisme est mis en œuvre sur deux phénomènes importants : l'émission spontanée, et la diffusion élastique de photons.

Ayant mis en place le traitement de l'émission spontanée, grâce à une description quantique du rayonnement et de l'atome en interaction, on peut se demander s'il est possible de prendre correctement en compte l'émission spontanée dans une description où l'atome seulement est quantifié. La réponse est positive, mais il faut introduire de nouveaux outils. Le chapitre 4 présente l'un d'entre eux, la matrice densité, qui obéira aux équations de Bloch optique. Le chapitre 5 en présente un autre, celui des équations de Heisenberg. Ces deux formalismes sont utilisés constamment dans toute l'optique quantique moderne.

Finalement, le chapitre 4 présente une application importante de l'optique quantique :

l'optique non-linéaire. Dans ce domaine on peut considérablement simplifier la présentation, et donner des images fructueuses, en choisissant judicieusement ses outils dans la panoplie qui a été présentée dans l'ensemble des deux cours d'optique quantique.

Ce cours permet de mettre en application les connaissances acquises dans les cours antérieurs d'électromagnétisme et de mécanique quantique. Il s'inscrit logiquement dans le prolongement des cours de Mécanique quantique et d'Optique quantique 1 : Lasers désigné par le sigle OQ1. Il fera souvent appel au remarquable cours de Jean-Louis Basdevant et Jean Dalibard, désigné par le sigle BD. Le livre de mécanique quantique de Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, et Franck Laloë, est désigné par CDL. Enfin, l'ouvrage de référence de C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, et G. Grynberg, est désigné par CDG.

Cet enseignement est issu du superbe cours de Gilbert Grynberg, développé au fil des années. C'est aussi le résultat d'un travail d'équipe, où Claude Fabre, Jean-Louis Basdevant, Jean Dalibard, Michel Brune, et Manuel Joffre, ont apporté des contributions importantes.

Nous ne saurions terminer cet avant-propos sans évoquer la mémoire de Gilbert Grynberg qui nous a quittés au début de 2003, nous laissant avec une grande peine, et un grand vide. C'est lui qui a créé cet enseignement d'Optique Quantique. Il avait d'abord introduit, au sein du tronc commun de mécanique quantique, des exemples puisés dans ce domaine, à une époque où l'optique n'était pas encore redevenue une discipline incontournable. Il avait alors été assez convaincant pour qu'on lui demande de créer un cours d'optique quantique lors de la réforme ayant introduit les majeures. C'est dans ce cadre que l'un d'entre nous (A.A.) a eu la chance de travailler avec lui, découvrant sa conception originale de l'enseignement de l'optique quantique, basée sur une expérience de recherche de très haut niveau, et sur une réflexion personnelle profonde. Cette conception sous-tend le cours que vous allez recevoir. Elle consiste à vous montrer que si l'on veut comprendre en profondeur les phénomènes afin de pouvoir ensuite devenir créatif, il ne faut pas être dogmatique, et savoir jongler avec des approches très différentes permettant de voir les phénomènes sous des angles variés, de se les représenter avec des images diverses, de les traiter avec plusieurs formalismes. Gilbert n'avait pas son pareil pour sauter du modèle classique de l'électron lié élastiquement, au modèle complètement quantique de l'atome habillé, en passant par le modèle semi-classique de l'interaction lumière-matière. Il voulait faire partager aux polytechniciens cette expérience intellectuelle, dont il pensait qu'elle avait une valeur générale, bien au-delà de notre discipline. Son influence nous a marqués si fortement que son esprit vit toujours au travers de ce cours.

Alain Aspect, Philippe Grangier
Décembre 2005

Bibliographie

H.-A. BACHOR AND T.C. RALPH : *A Guide to Experiments in Quantum Optics* (Wiley-VCH, 2nd edition, 2004).

N. BLOEMBERGEN : *Nonlinear Optics* (World Scientific).

C. COHEN-TANNOUDJI, J. DUPONT-ROC, G. GRYNBERG :

- *Introduction à l'électrodynamique quantique.*
- *Processus d'interaction entre photons et atomes* (Éditions du CNRS)¹.

C. COHEN-TANNOUDJI : *Atoms in electromagnetic fields* (World Scientific).

C. GARDINER : *Quantum noise* (Springer, 1991).

C.C. GERRY et P.L. KNIGHT : *Introductory Quantum Optics* (Cambridge University Press, 2004).

R.J. GLAUBER : *Optical coherence and photon statistics*, in « *Quantum optics and electronics* » (cours des Houches, 1965, édité par C. de Witt, A. Blandin et C. Cohen-Tannoudji ; Gordon and Breach, New-York). Voir aussi R.J. GLAUBER, *The Quantum Theory of Optical Coherence*, Physical Review 130, 2529 (1963).

H. HAKEN : *Laser theory* (Springer Verlag).

M. LEVENSON : *Introduction to Nonlinear Laser Spectroscopy* (Academic Press).

R. LOUDON : *The Quantum Theory of Light* (Oxford Science Publication).

¹Ces deux ouvrages sont appelés CDG1 et CDG2 dans ce cours.

L. MANDEL et E. WOLF : *Optical coherence and quantum optics* (Cambridge University Press).

P. MEYSTRE et M. SARGENT III : *Elements of Quantum Optics* (Springer).

M.A. NIELSEN et I.L. CHUANG : *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, 2000).

B.E.A. SALEH, M.C. TEICH : *Fundamentals of Photonics* (Wiley).

M. SARGENT, M.O. SCULLY, W.E. LAMB : *Laser Physics* (Addison Wesley).

M. O. SCULLY ET M. S. ZUBAIRY : *Quantum Optics* (Cambridge University Press).

R. SHEN : *Principles of Nonlinear Optics* (Wiley).

D. WALLS et G. MILBURN : *Quantum Optics* (Springer, 1991).

A. YARIV : *Quantum Electronics*, third edition (Wiley).

Table des matières

1	Champs et charges en interaction	11
1.1	Équations de l'électrodynamique classique	12
1.1.1	Équations de Maxwell-Lorentz dans l'espace réel	12
1.1.2	Espace réciproque	13
1.1.3	Équations de Maxwell dans l'espace réciproque	16
1.2	Composantes transverses et longitudinales	17
1.2.1	Définitions	17
1.2.2	Décomposition d'un champ quelconque en partie longitudinale et partie transverse	18
1.2.3	Champs électriques et magnétiques longitudinaux	19
1.2.4	Évolution des champs transverses	19
1.2.5	Modes du rayonnement	20
1.2.6	Onde plane, progressive, monochromatique, polarisée	21
1.3	Potentiels dans l'espace réciproque	22
1.3.1	Définition	22
1.3.2	Invariance de $\mathcal{A}_{\perp n}$ par transformation de jauge	23
1.3.3	Équation d'évolution des potentiels	23
1.3.4	La jauge de Coulomb	24
1.4	Variables normales	24
1.4.1	Motivation et définition	24
1.4.2	Analogie avec l'oscillateur harmonique	27
1.4.3	Expression des champs transverses en fonction des variables normales	28
1.4.4	Évolution des variables normales	30
1.4.5	Description spatio-temporelle du champ libre	31
1.5	Énergie et impulsion du champ de rayonnement	31
1.5.1	Énergie du champ de rayonnement. Découplage des modes	32
1.5.2	Impulsion du champ de rayonnement	33
1.6	Énergie et impulsion du système {champ+particules}	34
1.6.1	Constantes du mouvement pour le système global	34
1.6.2	Séparation des variables longitudinales et transverses dans les dif- férentes constantes du mouvement	36
1.7	Conclusion	40
	Complément 1A : La jauge de Lorentz : potentiels retardés	41

Complément 1B : Modèle de l'électron élastiquement lié	43
1B.1 Notations et hypothèses simplificatrices	44
1B.2 Rayonnement dipolaire électrique	45
1B.3 Amortissement radiatif d'un électron élastiquement lié	52
1B.4 Diffusion Rayleigh, Thomson, résonnante	55
1B.5 Susceptibilité	58
1B.6 Electron élastiquement lié et atome à deux niveaux	59
2 Quantification du rayonnement	61
2.1 Quantification du rayonnement : méthode heuristique	62
2.1.1 Rappels : quantification d'un ensemble d'oscillateurs harmoniques matériels	62
2.1.2 Quantification du rayonnement	65
2.1.3 Observables physiques : champs ; impulsion	67
2.2 États stationnaires du rayonnement	69
2.2.1 Diagonalisation de l'hamiltonien du champ libre	69
2.2.2 Notion de photon	70
2.2.3 Propriétés du vide, état fondamental du champ	71
2.3 Rayonnement monomode	73
2.3.1 Champ classique monomode	73
2.3.2 États nombres $ n_\ell\rangle$	74
2.3.3 États quasi-classiques $ \alpha_\ell\rangle$	75
2.3.4 Représentation du champ quantique comme un champ classique stochastique	79
2.3.5 Inégalités de Heisenberg pour un champ monomode quelconque	81
2.3.6 Faisceau lumineux se propageant dans l'espace libre	84
2.4 Signaux de photodétection	88
2.4.1 Opérateur de photodétection	88
2.4.2 Signaux de photodétection pour différents états quantiques du champ	90
2.4.3 Signaux de photodétection à la sortie d'un interféromètre	92
2.5 Conclusion : Dualité onde-corpuscule pour la lumière	98
Complément 2A : Les états comprimés du rayonnement : un aperçu sur la réduction des fluctuations quantique de la lumière	101
2A.1 États comprimés du rayonnement	102
2A.1.1 Définition	102
2A.1.2 Valeurs moyennes des différentes observables du champ dans un état comprimé	102
2A.1.3 Opérateur de compression	106
2A.1.4 Passage d'un état comprimé au travers d'une lame partiellement réfléchissante	107
2A.1.5 Modification des fluctuations sous l'effet de pertes	109
2A.2 Production d'états comprimés	110
2A.2.1 Génération par processus paramétrique	110

2A.2.2	Autres méthodes de production d'états comprimés	111
2A.3	Applications des états comprimés	112
2A.3.1	Mesures de faibles absorptions	112
2A.3.2	Mesure interférométrique	113
Complément 2B : États à un photon		115
2B.1	Paquet d'onde à un photon. Évolution spatio-temporelle	115
2B.2	Anticorrélation à la sortie d'une lame semi-réfléchissante	118
Complément 2C : Photons intriqués en polarisation et violation des inégalités de Bell		121
2C.1	Du débat Einstein Bohr aux inégalités de Bell et à l'information quantique : une brève histoire de l'intrication	121
2C.2	Photons corrélés en polarisation : paire EPR	123
2C.2.1	Mesure de polarisation sur un seul photon	123
2C.2.2	Paires de photons. Mesures conjointes de polarisation	126
2C.2.3	Paires EPR corrélées en polarisation	127
2C.2.4	Recherche d'une image pour interpréter les corrélations entre me- sures éloignées	130
2C.3	Le théorème de Bell	134
2C.3.1	Inégalités de Bell	134
2C.3.2	Conflit avec la mécanique quantique	135
2C.3.3	Condition de localité et causalité relativiste : expérience avec pola- riseurs variables	137
2C.4	Le recours à l'expérience. Violation des inégalités de Bell	138
2C.5	Conclusion de la non localité	142
3	Interaction d'un atome	145
3.1	Hamiltonien d'interaction en jauge de Coulomb	146
3.1.1	Système total {Particules + Champ}	146
3.1.2	Hamiltonien d'interaction	149
3.2	Processus d'interaction	150
3.2.1	Hamiltonien \hat{H}_{I1}	150
3.2.2	Absorption	151
3.2.3	Émission	152
3.2.4	Oscillation de Rabi	154
3.2.5	Hamiltonien \hat{H}_{I2} : diffusion élastique	155
3.3	Émission spontanée	156
3.3.1	Émission spontanée	156
3.3.2	Quasi-continuum des états à un photon. Densité d'états	159
3.3.3	Taux d'émission spontanée dans une direction donnée	161
3.3.4	Durée de vie du niveau excité. Largeur naturelle	162
3.4	Diffusion d'un photon par un atome	165
3.4.1	Généralités - Section efficace de diffusion	165

3.4.2	Description qualitative de quelques processus de diffusion	168
3.4.3	Section efficace de diffusion Thomson	172
3.5	Conclusion	175
Complément 3A : Électrodynamique en cavité		179
3A.1	Présentation du problème	180
3A.2	Modes propres du système couplé {atome + cavité}	181
3A.3	Émission spontanée de l'atome excité à l'intérieur de la cavité	186
3A.4	Spectroscopie du système atome-cavité	187
3A.5	Évolution en présence d'un champ intracavité	188
3A.6	Cas d'une cavité imparfaite	191
3A.7	Conclusion	192
Complément 3B : Atome interagissant avec un champ dans un état quasi-classique : justification de l'approche semi-classique		193
3B.1	Changement de représentation en mécanique quantique	193
3B.1.1	Transformation de l'hamiltonien et du vecteur d'état	193
3B.1.2	Transformation des observables	194
3B.2	Changement pour le champ électromagnétique	195
3B.2.1	Transformation unitaire	195
3B.2.2	Le potentiel vecteur transverse dans la nouvelle représentation . . .	195
3B.2.3	Vecteur d'état	197
3B.3	Hamiltonien du système couplé «champ+particules»	197
3B.3.1	Les observables dans la nouvelle représentation	197
3B.3.2	L'hamiltonien dans la nouvelle représentation	198
3B.3.3	Comparaison avec l'approche semi-classique	199
Complément 3C : Interaction dipolaire électrique		201
3C.1	Transformation unitaire dans le formalisme semi-classique	201
3C.1.1	Rappels	201
3C.1.2	Changement de représentation	202
3C.2	Atome en interaction avec le rayonnement quantique	203
3C.2.1	Transformation unitaire	203
3C.2.2	L'hamiltonien dans la nouvelle représentation	204
Complément 3D : Photons jumeaux intriqués en polarisation émis dans une cascade radiative atomique		207
3D.1	Introduction. Paires de photons intriqués pour une expérience réelle	207
3D.2	Cascade radiative atomique	208
3D.2.1	Système considéré	208
3D.2.2	Émission du photon ν_1 : état intriqué atome-rayonnement	209
3D.2.3	Émission du photon ν_2 : paire EPR élémentaire	211
3D.3	Généralisation : sommation sur les fréquences	213

Chapitre 1

Champs et charges en interaction. Approche classique

Dans le cours « Optique Quantique 1 », on traite le problème d'un système de particules quantiques en interaction avec un *champ électromagnétique classique imposé de l'extérieur*, qui n'est pas modifié par la dynamique des particules. Les seules variables dynamiques du problème sont celles des particules. Dans ce chapitre et les suivants, nous nous proposons de traiter le problème plus général de l'interaction mutuelle entre des particules chargées et le champ électromagnétique : dans ce cas, le champ est une *nouvelle variable dynamique* du problème, dont l'évolution est couplée à celle des charges. Dans ce chapitre, le champ est traité classiquement. Les chapitres suivants seront consacrés à l'approche complètement quantique du même problème.

L'objet du présent chapitre est de rappeler des résultats de base de l'électrodynamique classique sous une forme qui permettra un passage aisé à la description quantique du champ. Il est intéressant d'écrire les équations de Maxwell pour les **composantes de Fourier spatiales des champs** (série ou intégrale de Fourier). C'est ce qui est fait dans la partie 1.1. On verra que les équations prennent une forme particulièrement simple qui permet de séparer aisément la partie « *rayonnée* » du champ (partie « *transverse* ») et sa partie « *électrostatique* », attachée aux charges (partie « *longitudinale* ») comme on le montre à la partie 1.2. Cette méthode est plus qu'un outil mathématique commode pour la résolution des équations. Elle permet d'introduire naturellement le concept de **mode** du champ électromagnétique, qui joue un rôle fondamental en électrodynamique. La partie 1.3 rappelle l'utilité, en électromagnétisme, des potentiels, et plus particulièrement du potentiel vecteur dont la composante transverse acquiert une signification physique, et qui joue un rôle crucial dans la méthode de quantification adoptée dans ce cours (en jauge de Coulomb). La partie 1.4 de ce chapitre introduit les « *variables normales* » du champ, qui auront une importance particulière lors de la quantification du rayonnement. Enfin, les parties 1.5 et 1.6 sont consacrées à l'étude des constantes du mouvement, en particulier l'énergie, qui deviendra l'opérateur hamiltonien lorsque le champ aura été quantifié.

Ce chapitre est suivi d'un complément présentant le modèle de l'*électron élastiquement lié*. Il s'agit d'une approche complètement classique du rayonnement émis par un atome décrit lui-même classiquement, dans lequel on suppose que l'électron est lié au noyau par une force de rappel élastique. Ce modèle permet de calculer un taux d'amortissement radiatif pour l'électron, ainsi que les caractéristiques de différents processus de diffusion de rayonnement. Il sera instructif de comparer ces résultats classiques avec les résultats quantiques du chapitre 3 relatifs à l'émission spontanée, et aux processus de diffusion radiative.

1.1 Les équations de l'électrodynamique classique dans l'espace réciproque

1.1.1 Équations de Maxwell-Lorentz dans l'espace réel

Les équations qui décrivent l'évolution temporelle d'un ensemble de particules, de position \mathbf{r}_α , de charge q_α et de masse m_α en interaction avec les champs $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ comprennent d'abord les équations de Maxwell qui relient le champ électromagnétique aux densités de charge et de courant $\rho(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t) \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (1.4)$$

Pour des particules ponctuelles chargées, les densités de charge et de courant s'expriment en fonction des positions $\mathbf{r}_\alpha(t)$ et des vitesses $\mathbf{v}_\alpha(t)$ des particules de charge q_α :

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(t)) \quad (1.5)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(t)) \quad (1.6)$$

Il faut leur ajouter l'équation de Newton-Lorentz qui régit, à la limite non relativiste, le mouvement des charges sous l'effet de la force de Lorentz :

$$m_{\alpha} \frac{d}{dt} \mathbf{v}_{\alpha} = q_{\alpha} \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}_{\alpha}, t) + \mathbf{v}_{\alpha} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_{\alpha}, t) \right]. \quad (1.7)$$

L'ensemble de ces équations (appelé équations de Maxwell-Lorentz) permet de déterminer entièrement la dynamique du système { champ + particules } lorsque l'état initial du système a été dûment précisé. Les équations de Maxwell étant du premier ordre et l'équation de Newton-Lorentz du second ordre, les conditions initiales nécessaires pour déterminer de manière univoque l'évolution future sont donc, à un instant t_0 donné :

- les valeurs des champs électrique et magnétique en tout point \mathbf{r} de l'espace ;
- les positions et les vitesses de chaque particule.

Ces quantités déterminent entièrement l'état du système à tout instant ultérieur, et constituent un ensemble complet de variables dynamiques. Le problème étudié ici est beaucoup plus compliqué que celui d'un système mécanique simple, puisque qu'il comporte a priori une *infinité continue* de variables indépendantes nécessaires à la définition du champ. Nous verrons dans la suite de ce chapitre comment on peut se ramener à la description de l'état du système à l'aide d'un *ensemble infini dénombrable* de variables. Cela permet de simplifier de nombreux problèmes en électrodynamique classique, ainsi que le passage à l'électrodynamique quantique.

1.1.2 Espace réciproque

Le passage à l'espace de Fourier (espace réciproque) est une méthode bien connue pour résoudre un système d'équations aux dérivées partielles. Pour des raisons de simplicité mathématique, nous aurons recours à des *séries* de Fourier plutôt qu'à des *intégrales* de Fourier. Nous introduisons cependant les deux dans les paragraphes suivants, qui nous permettront de préciser les notations et de faire quelques rappels.

a. Série de Fourier

Le système composé des charges en mouvement est supposé de taille finie. Nous l'englobons alors dans un volume V de dimensions finies, mais largement supérieures au volume occupé par le système physique lui-même. Nous supposons pour simplifier que ce volume est cubique de côté L . On définit alors les *composantes de Fourier spatiales* $\mathcal{E}_n(t)$ du champ $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ par la relation :

$$\Rightarrow \quad \mathcal{E}_n(t) = \iiint_{(V)} d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}} . \quad (1.8)$$

Ces composantes de Fourier permettent à leur tour de calculer le champ en tout point de l'espace, grâce à la formule :

$$\Rightarrow \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^3} \sum_n \mathcal{E}_n(t) e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}} . \quad (1.9)$$

L'intégrale est limitée au volume V et la notation \sum_n est une notation abrégée pour \sum_{n_x, n_y, n_z} , les nombres entiers n_x, n_y, n_z (positifs, négatifs ou nuls) permettant de définir les trois composantes du vecteur \mathbf{k}_n :

$$(\mathbf{k}_n)_x = n_x \frac{2\pi}{L} \quad ; \quad (\mathbf{k}_n)_y = n_y \frac{2\pi}{L} \quad ; \quad (\mathbf{k}_n)_z = n_z \frac{2\pi}{L} . \quad (1.10)$$

Les extrémités du vecteur \mathbf{k}_n forment donc un réseau cubique de pas $2\pi/L$, qui est d'autant plus « serré » que le volume V est grand. La relation (1.9) montre qu'il est possible de

décomposer tout champ dans le volume $V = L^3$ sur une base de fonctions $\exp\{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}\}$ où \mathbf{k}_n est donné par (1.10) ; l'équation (1.8) donne l'amplitude $\mathcal{E}_n(t)$ de chaque composante¹.

Remarques

(i) Il est bon de se souvenir qu'avec la définition utilisée ici, \mathcal{E}_n n'a pas les dimensions d'un champ électrique.

(ii) Les équations (1.10) traduisent des « conditions aux limites périodiques » sur les parois du cube fictif d'arête L pour les ondes planes utilisées dans la décomposition (1.9). Ce type de condition a déjà été rencontré dans le Complément (I.1) du cours « Optique Quantique 1 ».

b. Passage à la limite continue. Transformée de Fourier

Si L tend vers l'infini, les valeurs possibles de \mathbf{k}_n sont de plus en plus serrées. Lorsque la suite $\{\mathcal{E}_n(t)\}$ varie lentement entre deux entiers consécutifs, la somme sur n figurant dans (1.9) peut être transformée en une intégrale sur \mathbf{k} :

$$\frac{1}{L^3} \sum_n \longleftrightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint d^3k . \quad (1.11)$$

En effet, en vertu de (1.10), chaque vecteur \mathbf{k}_n occupe dans l'espace des \mathbf{k} , un volume $(2\pi/L)^3$: le nombre de modes dont l'extrémité du vecteur d'onde se trouve à l'intérieur de l'élément de volume d^3k est donc $(L/2\pi)^3 d^3k$.

La composante de Fourier $\mathcal{E}(\mathbf{k}, t)$ du champ $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ peut être définie comme la limite :

$$\mathcal{E}(\mathbf{k}, t) = \lim_{\substack{n, L \rightarrow \infty \\ n/L \text{ constant}}} (2\pi)^{-3/2} \mathcal{E}_n(t) . \quad (1.12)$$

Cette limite est prise pour $(n_x/L), (n_y/L), (n_z/L)$ constants de façon que la fonction $\mathcal{E}(\mathbf{k}, t)$ soit toujours évaluée au même point \mathbf{k} (voir 1.10).

Les relations liant $\mathcal{E}(\mathbf{k}, t)$ et $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ sont alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{k}, t) &= (2\pi)^{-3/2} \iiint d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= (2\pi)^{-3/2} \iiint d^3k \mathcal{E}(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \end{aligned} \quad (1.13)$$

les intégrales portant maintenant sur tout l'espace. Le facteur arbitraire $(2\pi)^{-3/2}$ a été choisi dans (1.12) pour rendre les relations (1.13) plus symétriques, et pour coïncider avec les définitions de nombreux des ouvrages².

Nous appellerons *espace réciproque* l'espace des fonctions $\mathcal{E}_n(t)$ ou $\mathcal{E}(\mathbf{k}, t)$, nous noterons par une lettre droite les grandeurs dans l'espace réel et par une lettre cursive les mêmes grandeurs dans l'espace réciproque. Les fonctions $\mathcal{E}_n(t)$ ne dépendant que du temps, nous les écrirons souvent dans la suite \mathcal{E}_n , la dépendance temporelle étant implicite.

¹Il n'y a pas de consensus dans la littérature sur les constantes de normalisation des équations (1.8) et (1.9). On pourra trouver dans d'autres ouvrages d'autres normalisations pour les composantes de Fourier $\mathcal{E}_n(t)$.

²Voir par exemple dans BD, CDL, CDG.

Remarques

(i) Pour établir la règle d'or de Fermi, on effectue, pour les mêmes raisons de commodité mathématique, une procédure à bien des égards analogue consistant à enfermer le système dans un grand volume V . Les états discrets du quasi-continuum définis dans le volume V correspondent à la série de Fourier et les états du continuum à l'intégrale de Fourier. La quantité $(2\pi/L)^3$ apparaît alors comme une « densité d'états » de la base de Fourier, analogue à la densité d'états introduite dans la règle d'or de Fermi.

(ii) Le volume V , introduit pour des raisons mathématiques, est ici fictif. Il existe cependant des situations physiques où les particules sont situées dans une vraie cavité aux parois réfléchissantes (voir Complément 3A). Il est souvent avantageux pour étudier ce problème de prendre comme volume V figurant dans les équations (1.8) et (1.9) le volume de la cavité réelle.

c. Quelques formules utiles

Nous donnons ces formules dans le cas des séries de Fourier (les relations (1.11) et (1.12) permettent de passer aisément à la relation correspondante pour la transformée de Fourier).

Commençons par l'importante relation de Parseval-Plancherel :

$$\iiint_{(V)} d^3r F^*(\mathbf{r}, t) G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^3} \sum_n \mathcal{F}_n^*(t) \mathcal{G}_n(t) \quad (1.14a)$$

qui dans le cas particulier $F = G$ s'écrit :

$$\iiint_{(V)} d^3r |F(\mathbf{r}, t)|^2 = \frac{1}{L^3} \sum_n |\mathcal{F}_n(t)|^2 \quad (1.14b)$$

Ces relations peuvent s'interpréter comme la conservation du produit scalaire ou de la norme lorsqu'on passe de l'espace direct à l'espace réciproque.

Le tableau 1 donne les correspondances entre espace réel et espace réciproque pour les opérateurs différentiels les plus importants, pour le produit de convolution et pour la fonction de Dirac. Les opérateurs *différentiels* sont en particulier remplacés par des opérateurs *algébriques*. C'est la raison essentielle de l'introduction de l'espace réciproque dans la résolution d'équations aux dérivées partielles.

Notons enfin que la *réalité* du champ $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ entraîne, en utilisant (1.8), la relation de symétrie suivante :

$$\mathcal{E}_n^* = \mathcal{E}_{-n} \quad (1.15)$$

la notation $-n$ étant un abrégé pour $\{-n_x, -n_y, -n_z\}$.

Espace réel	Espace réciproque
$F(\mathbf{r}), \mathbf{V}(\mathbf{r})$	$\mathcal{F}_n, \mathcal{V}_n$
$\nabla F(\mathbf{r})$	$i\mathbf{k}_n \mathcal{F}_n$
$\nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r})$	$i\mathbf{k}_n \cdot \mathcal{V}_n$
$\nabla \times \mathbf{V}(\mathbf{r})$	$i\mathbf{k}_n \times \mathcal{V}_n$
$\int d^3r' F(\mathbf{r}) G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$	$\mathcal{F}_n \mathcal{G}_n$
$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$	$\exp\{-i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}_0\}$

TAB. 1.1: Expression dans l'espace réciproque de diverses quantités mathématiques de l'espace direct.

1.1.3 Équations de Maxwell dans l'espace réciproque

Dans l'espace réciproque, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$i\mathbf{k}_n \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_n = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_n \quad (1.16a)$$

$$i\mathbf{k}_n \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}}_n = 0 \quad (1.16b)$$

\Rightarrow

$$i\mathbf{k}_n \times \boldsymbol{\mathcal{E}}_n = -\frac{d}{dt} \boldsymbol{\mathcal{B}}_n \quad (1.16c)$$

$$i\mathbf{k}_n \times \boldsymbol{\mathcal{B}}_n = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\mathcal{E}}_n + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{j}_n. \quad (1.16d)$$

Les équations aux dérivées partielles ont été remplacées par un système d'équations différentielles ordinaires portant sur des fonctions dépendant uniquement du temps. Plus précisément, nous constatons que les dérivées temporelles de $\boldsymbol{\mathcal{E}}_n$ et $\boldsymbol{\mathcal{B}}_n$ dépendent des valeurs de $\boldsymbol{\mathcal{E}}_n, \boldsymbol{\mathcal{B}}_n, \rho_n, \mathbf{j}_n$ pour la même valeur de n , c'est-à-dire *pour le même point \mathbf{k}_n de l'espace réciproque* : les équations (1.16) sont *purement locales* dans l'espace réciproque. Remarquons néanmoins que par l'intermédiaire du mouvement des charges, les quantités ρ_n et \mathbf{j}_n peuvent dépendre des composantes de Fourier des champs pour des valeurs $n' \neq n$. L'équation de Lorentz est en effet locale dans l'espace réel, mais non locale dans l'espace réciproque. Les équations d'évolution des champs dans l'espace réciproque sont donc en général des équations couplées. En revanche, dans l'espace libre ($\rho = 0, \mathbf{j} = 0$) les équations correspondant à des valeurs de n différentes *ne sont pas couplées entre elles*.

Dans le cas d'une distribution de charges ponctuelles, les densités de charges et de courant données par les équations (1.5) et (1.6) s'écrivent dans l'espace réciproque :

$$\begin{aligned} \rho_n &= \sum_{\alpha} q_{\alpha} e^{-i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}_{\alpha}} \\ \mathbf{j}_n &= \sum_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} e^{-i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}_{\alpha}}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

1.2 Composantes transverses et longitudinales des champs

1.2.1 Définitions

On appelle *champ longitudinal* un champ vectoriel, noté $\mathbf{V}_{//}(\mathbf{r})$, dont le rotationnel est nul en tout point :

$$\nabla \times \mathbf{V}_{//}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} . \quad (1.18)$$

On appelle *champ transverse* un champ vectoriel, noté $\mathbf{V}_{\perp}(\mathbf{r})$, dont la divergence est nulle en tout point :

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_{\perp}(\mathbf{r}) = 0 . \quad (1.19)$$

Ces relations de définition sont plus simples lorsqu'on les transcrit dans l'espace réciproque :

$$\mathbf{k}_n \times \mathcal{V}_{//n} = \mathbf{0} , \quad (1.20)$$

$$\mathbf{k}_n \cdot \mathcal{V}_{\perp n} = 0 . \quad (1.21)$$

Dans *l'espace réciproque*, un champ longitudinal est donc un champ de vecteurs *parallèles* à \mathbf{k}_n en tout point, un champ transverse un champ de vecteurs *perpendiculaires* à \mathbf{k}_n en tout point.

Les relations (1.20) et (1.21) montrent que pour une direction \mathbf{k}_n donnée, un champ longitudinal appartient à un espace de dimension 1 (puisque'il est aligné le long de \mathbf{k}_n), alors qu'un champ transverse, défini dans le plan perpendiculaire à \mathbf{k}_n , appartient à un espace de dimension deux (voir figure 1.1). On peut définir dans ce plan (et d'une infinité de manières différentes) deux vecteurs unitaires $\vec{\mathcal{E}}_{n1}$ et $\vec{\mathcal{E}}_{n2}$ orthogonaux entre eux et écrire :

$$\Rightarrow \quad \mathcal{V}_{\perp n} = \mathcal{V}_{\perp n1} \vec{\mathcal{E}}_{n1} + \mathcal{V}_{\perp n2} \vec{\mathcal{E}}_{n2} . \quad (1.22a)$$

L'équation (1.22a) nous montre que tout champ vectoriel transverse peut être décomposé en *composantes* (n, s) de vecteur d'onde $\mathbf{k}_n = (k_{n_x}, k_{n_y}, k_{n_z})$ et de polarisation $\vec{\mathcal{E}}_{n,s}$. Chaque composante est repérée par un ensemble de quatre indices n_x, n_y, n_z et s . Les trois premiers peuvent prendre toute valeur entière, tandis que s vaut 1 ou 2. Nous pourrions donc écrire :

$$\mathbf{V}_{\perp}(\mathbf{r}) = \frac{1}{L^3} \sum_{n,s} \mathcal{V}_{\perp n,s} e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}} \vec{\mathcal{E}}_{n,s} . \quad (1.22b)$$

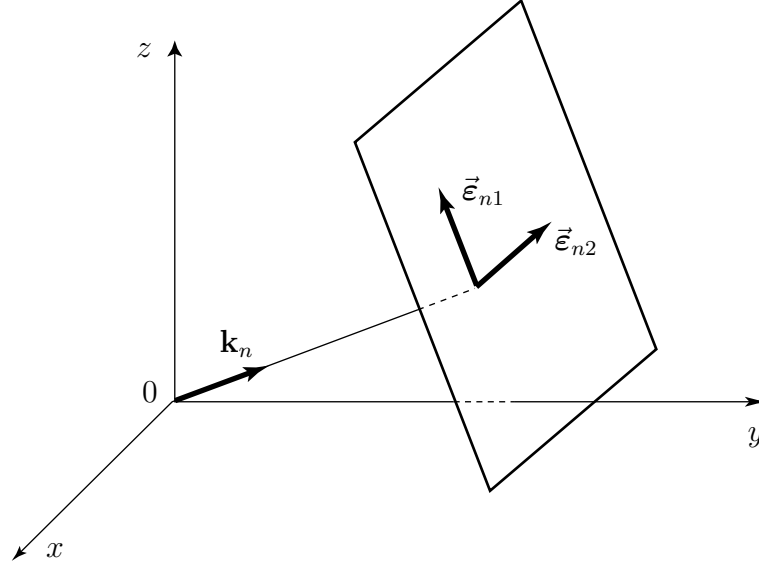


FIG. 1.1: Schéma montrant deux vecteurs unitaires dans le plan perpendiculaire à \mathbf{k}_n servant de base de l'espace des champs transverses dans l'espace réciproque (le choix des vecteurs orthogonaux $\vec{\epsilon}_{n1}$ et $\vec{\epsilon}_{n2}$ est a priori quelconque dans ce plan).

Remarque

La notion de décomposition de $\mathbf{V}_{\perp n}$ en deux polarisations orthogonales peut être généralisée au cas des polarisations circulaires droite et gauche en introduisant des vecteurs unitaires complexes dont l'orthogonalité s'exprime par la nullité du produit hermitien (voir par exemple le § A.3 du complément II.1 du cours d'Optique Quantique 1).

1.2.2 Décomposition d'un champ quelconque en partie longitudinale et partie transverse

Considérons un champ vectoriel quelconque $\mathbf{V}(\mathbf{r})$. On voit immédiatement que ses composantes \mathbf{V}_n dans l'espace réciproque vont pouvoir se décomposer pour tout n de manière unique en partie longitudinale et partie transverse :

$$\Rightarrow \mathbf{V}_n = \mathbf{V}_{//n} + \mathbf{V}_{\perp n} \quad (1.23)$$

les vecteurs $\mathbf{V}_{//n}$ et $\mathbf{V}_{\perp n}$ étant obtenus par projection de \mathbf{V}_n sur la direction de \mathbf{k}_n et sur le plan perpendiculaire à \mathbf{k}_n :

$$\mathbf{V}_{//n} = \frac{\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{V}_n}{|\mathbf{k}_n|^2} \mathbf{k}_n \quad (1.24)$$

$$\mathbf{V}_{\perp n} = \mathbf{V}_n - \mathbf{V}_{//n}$$

Pour obtenir les deux composantes $\mathbf{V}_{//}(\mathbf{r})$ et $\mathbf{V}_{\perp}(\mathbf{r})$ du champ vectoriel initial (dans l'espace réel), il faut resommer les séries de Fourier (1.9) en utilisant les expressions (1.24) de $\mathbf{V}_{//n}$ et $\mathbf{V}_{\perp n}$.

1.2.3 Champs électriques et magnétiques longitudinaux

L'équation de Maxwell (1.16b) exprime que $\mathcal{B}_{//n}$ est nul pour tout n , donc que la *champ magnétique est purement transverse* :

$$\mathcal{B}_n = \mathcal{B}_{\perp n} . \quad (1.25a)$$

L'équation (1.16a) s'écrit quant à elle :

$$i\mathbf{k}_n \cdot \mathcal{E}_{//n} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_n . \quad (1.25b)$$

Elle relie d'une manière purement algébrique le champ $\mathcal{E}_{//n}$ à la densité de charge ρ_n au même instant t . Revenant à l'aide du tableau 1.1 à l'espace direct, on peut alors écrire :

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_{//}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t) . \quad (1.26)$$

On retrouve l'*équation fondamentale de l'électrostatique*, écrite ici pour une distribution de charges éventuellement non stationnaire. Dans le cas d'une distribution de charges ponctuelles, sa solution est bien connue³ :

$$\mathbf{E}_{//}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(t)|^3} . \quad (1.27)$$

Il apparaît ainsi que le *champ électrique longitudinal à l'instant t est le champ de Coulomb instantané* associé à ρ , et calculé comme si la distribution de charges était statique et figée à sa valeur prise à l'instant t . L'expression (1.27) montre que $\mathbf{E}_{//}$ est une fonction explicite de la position des particules. Ce n'est pas une variable dynamique autonome, son évolution étant complètement « asservie » à la dynamique des particules.

Remarque

Le fait que le champ électrique longitudinal suive instantanément l'évolution de la distribution de charges n'implique pas l'existence de phénomènes électriques se propageant plus vite que la lumière. En effet, seul le champ électrique *total* est mesurable et a un sens physique. On peut montrer⁴ que le champ transverse \mathbf{E}_{\perp} a lui aussi une composante instantanée qui compense exactement celle de $\mathbf{E}_{//}$, de sorte que le champ total reste purement retardé.

1.2.4 Évolution des champs transverses

Considérons à présent les parties transverses des équations (1.16c) et (1.16d). Sachant que $i\mathbf{k}_n \times \mathcal{E}_{//n}$ est nul, elles s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{B}_n = -i\mathbf{k}_n \times \mathcal{E}_{\perp n} , \quad (1.28a)$$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_{\perp n} = ic^2 \mathbf{k}_n \times \mathcal{B}_n - \frac{1}{\varepsilon_0} \mathcal{J}_{\perp n} , \quad (1.28b)$$

³On rappelle que le volume V est très grand devant les dimensions de la région de l'espace où se trouvent les charges.

⁴Voir CDG 1 Complément CI, exercice 3.

où $\mathcal{J}_{\perp n}$ est la composante de Fourier transverse de la densité de courant. Les équations (1.28) déterminent la dynamique couplée des champs électrique et magnétique transverses dont on constate qu'ils dépendent des sources uniquement par la partie transverse de la densité de courant, et qu'ils peuvent être différents de zéro même si le courant source est nul. Ce sont ces équations qui décrivent la dynamique du rayonnement. C'est pourquoi dans ce cours **rayonnement** et **champ transverse** seront souvent **synonymes**.

Le passage à l'espace réciproque nous a donc permis de distinguer deux parties dans le champ électromagnétique : la composante longitudinale, nulle pour \mathbf{B} , simple fonction de la distribution instantanée des charges pour \mathbf{E} ; la composante transverse, dotée d'une dynamique propre, obéissant aux équations (1.28). À la différence des composantes longitudinales, les *composantes transverses* constituent donc des *variables dynamiques* : ce sont les variables dynamiques du rayonnement. Elles vont nous permettre de définir les modes du rayonnement.

1.2.5 Modes du rayonnement

Pour étudier la dynamique du rayonnement libre, considérons les équations (1.28) dans le cas où le terme source est nul ($\mathcal{J}_{\perp n} = 0$). En dérivant (1.28b) et en éliminant \mathcal{B}_n , on obtient

$$\frac{d^2 \mathcal{E}_{\perp n}}{dt^2} = c^2 \mathbf{k}_n \times (\mathbf{k}_n \times \mathcal{E}_{\perp n}) = -c^2 k_n^2 \mathcal{E}_{\perp n} \quad (1.29)$$

(on a utilisé à nouveau la transversalité de $\mathcal{E}_{\perp n}$). La solution générale de cette équation, pour \mathbf{k}_n donné, est de la forme

$$\mathcal{E}_{\perp n}(t) = \vec{\lambda}_n e^{-i\omega_n t} + \vec{\mu}_n e^{i\omega_n t} \quad (1.30)$$

où $\vec{\lambda}_n$ et $\vec{\mu}_n$ sont des vecteurs complexes perpendiculaires à \mathbf{k}_n et

$$\omega_n = c k_n. \quad (1.31)$$

Compte-tenu de la relation (1.8), la composante $-n$ associée à $-\mathbf{k}_n$ a une amplitude non nulle qui vaut

$$\mathcal{E}_{\perp(-n)} = \mathcal{E}_{\perp n}^* = \vec{\lambda}_n^* e^{i\omega_n t} + \vec{\mu}_n^* e^{-i\omega_n t}. \quad (1.32)$$

Dans l'espace réel, le champ correspondant à la source de ces deux composantes vaut donc

$$\mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^3} \left[\vec{\lambda}_n \exp i\{\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r} - \omega_n t\} + \vec{\mu}_n \exp i\{\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r} + \omega_n t\} \right] + \text{c.c.} \quad (1.33)$$

On constate qu'on a la somme d'une onde plane $2\vec{\lambda}_n L^{-3} \cos(\omega_n t - \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r})$ se propageant suivant \mathbf{k}_n , et d'une onde plane indépendante $2\vec{\mu}_n L^{-3} \cos(\omega_n t + \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r})$ se propageant suivant $-\mathbf{k}_n$. Ces deux ondes, dont les dynamiques sont découplées, sont deux modes distincts du rayonnement.

Pour identifier l'ensemble des modes (de type onde plane polarisée) il faut se souvenir que pour chaque \mathbf{k}_n il existe deux polarisations orthogonales, qui donnent lieu à des évolutions découplées. On trouve qu'en définitive la solution la plus générale des équations (1.28) sans second membre s'écrit

$$\mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^3} \sum_{\ell} \vec{\epsilon}_\ell \lambda_\ell \exp i(\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r} - \omega_\ell t) + \text{c.c.} \quad (1.34)$$

où ℓ désigne l'ensemble des 3 nombres entiers relatifs n_x, n_y , et n_z ainsi que l'indice discret s à 2 valeurs déterminant la polarisation transverse $\vec{\epsilon}_\ell$. Cette décomposition en un ensemble de variables dynamiques découplées est une décomposition en modes. Dans l'exemple choisi, les modes sont des ondes planes progressives polarisées. On les obtient à partir des conditions aux limites périodiques.

En utilisant d'autres conditions aux limites, on aurait obtenu d'autres types de mode. Par exemple les conditions aux limites associées à des parois infiniment conductrices conduisent à des modes qui sont des ondes stationnaires (des cosinus ou des sinus pour une boîte parallélépipédique).

Remarque

Il est important de ne pas faire de confusion entre les équations utilisant l'indice n et celles utilisant l'indice ℓ . L'indice ℓ est relatif à un mode ℓ particulier, c'est-à-dire ici une onde plane progressive, se propageant avec un vecteur d'onde \mathbf{k}_ℓ donné, et de polarisation $\vec{\epsilon}_\ell$ donnée (perpendiculaire à \mathbf{k}_ℓ). L'indice n est relatif à la composante de Fourier spatiale \mathbf{k}_n , et il peut a priori concerner quatre modes ℓ , deux se propageant suivant \mathbf{k}_n (de polarisations mutuellement orthogonales) et deux se propageant suivant $-\mathbf{k}_n$.

1.2.6 Onde plane, progressive, monochromatique, polarisée

Si, dans le développement (1.34), un seul mode a une amplitude non-nulle, le rayonnement s'écrit

$$\mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}_0 \vec{\epsilon}_\ell \exp i(\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r} - \omega_\ell t) + \text{c.c.} \quad (1.35)$$

avec

$$\vec{\epsilon}_\ell \cdot \mathbf{k}_\ell = 0 \quad (1.36)$$

et

$$\omega_\ell = c k_\ell . \quad (1.37)$$

Le champ magnétique vaut alors (par exemple en vertu de l'équation (1.28a))

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{k}_\ell}{\omega_\ell} \times \mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}, t) . \quad (1.38)$$

On retrouve la propriété bien connue pour une onde plane, progressive, monochromatique, polarisée : les vecteurs $\mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}_\perp(\mathbf{r}, t)$ et \mathbf{k}_ℓ forment un trièdre direct, à chaque instant. Cela implique en particulier que $\mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{B}_\perp(\mathbf{r}, t)$ vibrent en phase.

Remarques

(i) Les propriétés ci-dessus restent vraies si la polarisation $\vec{\epsilon}_\ell$ est un vecteur complexe (polarisation circulaire).

(ii) La propriété (1.19) est spécifique des modes d'onde plane progressive associés à la décomposition de Fourier du § 1.1.2.a. Si on considère d'autres types de modes – par exemple des modes stationnaires en $\cos \mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r}$, alors \mathbf{E} et \mathbf{B} n'oscillent pas nécessairement en phase.

1.3 Les potentiels électromagnétiques dans l'espace réciproque

1.3.1 Définition

Nous savons que le champ magnétique est purement transverse. Dans l'espace réciproque, \mathcal{B}_n étant perpendiculaire à \mathbf{k}_n , on peut donc toujours trouver un vecteur \mathcal{A}_n tel que :

$$\implies \mathcal{B}_n = i\mathbf{k}_n \times \mathcal{A}_n . \quad (1.39)$$

La grandeur \mathcal{A}_n n'est autre que le potentiel vecteur dans l'espace réciproque. Comme tout champ vectoriel, il a une partie transverse $\mathcal{A}_{\perp n}$ et une partie longitudinale $\mathcal{A}_{//n}$. Notons d'abord que seule la composante transverse contribue au champ magnétique, puisque $\mathbf{k}_n \times \mathcal{A}_{//n} = \mathbf{0}$. Nous avons donc :

$$\mathcal{B}_n = i\mathbf{k}_n \times \mathcal{A}_{\perp n} . \quad (1.40a)$$

En utilisant (1.28a), il est facile de voir par ailleurs que $\mathcal{E}_{\perp n}$ et $\mathcal{A}_{\perp n}$ sont reliés par :

$$\implies \mathcal{E}_{\perp n} = -\frac{d}{dt}\mathcal{A}_{\perp n} . \quad (1.40b)$$

Le rayonnement (ou champ transverse) à un instant donné est donc totalement déterminé par la donnée de $\mathcal{A}_{\perp n}$ et de sa dérivée temporelle.

Quant au champ électrique longitudinal, il peut toujours être écrit sous la forme :

$$\mathcal{E}_{//n} = -\frac{d}{dt}\mathcal{A}_{//n} - i\mathbf{k}_n\mathcal{U}_n \quad (1.41)$$

où \mathcal{U}_n est un champ scalaire. Ce champ \mathcal{U}_n n'est autre que le potentiel scalaire habituel écrit dans l'espace réciproque, comme on le vérifie en faisant la somme de (1.40b) et de (1.41) et en revenant dans l'espace réel après sommation sur tous les modes. Faisant de même pour (1.39), on trouve :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) - \nabla U(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (1.42)$$

qui sont les relations habituelles de définition des potentiels. L'introduction de ces potentiels a pour conséquence que des champs électrique et magnétique définis par (1.42) sont automatiquement solutions des équations de Maxwell (1.16b) et (1.16c).

1.3.2 Invariance de $\mathcal{A}_{\perp n}$ par transformation de jauge

La relation (1.39) ne définit pas entièrement le champ \mathcal{A}_n . On peut en effet lui ajouter un vecteur quelconque parallèle à \mathbf{k}_n sans changer la valeur de \mathcal{B}_n . Plus précisément la transformation

$$\mathcal{A}'_n = \mathcal{A}_n + i\mathbf{k}_n \mathcal{F}_n \quad (1.43a)$$

$$\mathcal{U}'_n = \mathcal{U}_n - \frac{d}{dt} \mathcal{F}_n \quad (1.43b)$$

où \mathcal{F}_n est un champ scalaire quelconque, laisse manifestement \mathcal{B}_n et \mathcal{E}_n inchangés. Les relations (1.43) sont les transposées dans l'espace réciproque des *transformations de jauge* considérées dans le chapitre 2 du cours « Optique Quantique 1 ».

L'équation (1.43a) relative à un champ vectoriel se décompose en une partie longitudinale et une partie transverse :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \mathcal{A}'_{//n} &= \mathcal{A}_{//n} + i\mathbf{k}_n \mathcal{F}_n \\ \mathcal{A}'_{\perp n} &= \mathcal{A}_{\perp n} \end{aligned} \quad (1.44)$$

Ces équations montrent que *la composante transverse du potentiel vecteur n'est pas modifiée par une transformation de jauge*, au même titre que les champs magnétiques et électriques eux-mêmes. À la différence de $\mathbf{A}_{//}$ et U qui sont des intermédiaires de calcul commodes, mais ayant un certain arbitraire, *le champ \mathbf{A}_{\perp} , associé par la relation (1.40b) au champ transverse, c'est-à-dire au champ de rayonnement, a une réalité physique indéniable.*

1.3.3 Équation d'évolution des potentiels

En exprimant dans l'équation (1.28b) les champs transverses en fonction de $\mathcal{A}_{\perp n}$ (Équations (1.40)), on trouve l'équation d'évolution de $\mathcal{A}_{\perp n}$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{A}_{\perp n} + \omega_n^2 \mathcal{A}_{\perp n} = \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{j}_{\perp n} . \quad (1.45)$$

Lorsque le second membre de cette équation est nul, on a l'équation d'évolution du rayonnement libre. On peut retrouver aussi les résultats du paragraphe (1.2.4) relatif aux champs transverses. Par ailleurs, en portant (1.41) dans (1.25b), on obtient :

$$-i\mathbf{k}_n \cdot \frac{d}{dt} \mathcal{A}_{//n} + k_n^2 \mathcal{U}_n = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_n . \quad (1.46)$$

Le fait que nous ayons *deux quantités inconnues* $\mathcal{A}_{//n}$ et \mathcal{U}_n pour une seule équation est due à la *non-unicité des potentiels* évoquée plus haut. Pour pouvoir déterminer les potentiels à tout instant, il faut de plus fixer la *jauge*.

1.3.4 La jauge de Coulomb

Comme le montre l'équation (1.44), choisir une jauge revient à fixer la composante longitudinale du potentiel vecteur $\mathcal{A}_{//n}$. Le choix le plus simple consiste à poser

$$\Rightarrow \mathcal{A}_{//n} = 0 \quad (1.47)$$

pour tout n , ce qui est équivalent à poser dans l'espace réel :

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (1.48)$$

Un tel choix correspond à la *jauge de Coulomb*, qui a déjà été introduite dans le chapitre 2 du cours d'Optique Quantique 1 (paragraphe 2.2.3). Dans cette jauge, on peut identifier \mathbf{A}_\perp et \mathbf{A} . La relation (1.41) montre alors que \mathcal{U}_n est simplement lié au champ électrique longitudinal par la relation :

$$\mathcal{E}_{//n} = -i\mathbf{k}_n \mathcal{U}_n. \quad (1.49)$$

Le champ électrique longitudinal étant, comme nous l'avons montré dans le paragraphe (1.2.3), le champ électrostatique instantané, il en résulte que le potentiel scalaire est le *potentiel électrostatique de Coulomb instantané* (d'où le nom de jauge de Coulomb). Il est donné dans l'espace réel et dans le cas de charges ponctuelles, par l'expression :

$$U(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(t)|}. \quad (1.50)$$

Dans cette jauge, le potentiel scalaire suit instantanément l'évolution de la distribution de charges.

Comme nous l'avons déjà vu au chapitre 2 du cours « Optique Quantique 1 », cette jauge est particulièrement bien adaptée à la physique des basses énergies, dans la mesure où le potentiel coulombien, qui est à l'origine des états liés des atomes et molécules, apparaît explicitement dans l'hamiltonien de l'électrodynamique. En outre, la jauge de Coulomb permet de quantifier le rayonnement avec une grande économie de formalisme. C'est ce que nous verrons dans le chapitre suivant.

1.4 Variables normales

1.4.1 Motivation et définition

Il est possible de donner une forme synthétique simple des diverses relations obtenues sur le champ transverse (champ de rayonnement) en introduisant de nouvelles variables,

les *variables normales du champ*, qui vont en fait nous faire retrouver la notion de modes, en tant que variables dynamiques découplées.

Considérons les équations d'évolution des composantes transverses $\mathcal{E}_{\perp n}$ et \mathcal{B}_n du rayonnement libre (1.28), avec $\mathcal{J}_{\perp n} = 0$)

$$\frac{d}{dt}\mathcal{B}_n = -i\mathbf{k}_n \times \mathcal{E}_{\perp n} \quad (1.51a)$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_{\perp n} = i c^2 \mathbf{k}_n \times \mathcal{B}_n . \quad (1.51b)$$

Comparées aux équations de Maxwell, qui couplent de proche en proche l'ensemble des composantes du champ électromagnétique en tous les points de l'espace, les équations (1.51a) et (1.51b) sont remarquablement simples puisqu'elles ne portent que sur une seule composante de Fourier \mathbf{k}_n . En passant dans l'espace de Fourier, on a découlé l'évolution des diverses composantes.

Cependant, le découplage n'est pas complet pour deux raisons. Tout d'abord les deux équations ci-dessus couplent les deux variables dynamiques $\mathcal{E}_{\perp n}$ et \mathcal{B}_n . Par ailleurs, à cause des relations du type (1.15) assurant la réalité des champs, il y a un couplage implicite entre les évolutions des variables dynamiques relatives aux composantes \mathbf{k}_n et $-\mathbf{k}_n$. On peut aussi se demander, en examinant les équations (1.51), dans quelle mesure il y a découplage entre deux polarisations orthogonales $\vec{\mathcal{E}}_{n1}$ et $\vec{\mathcal{E}}_{n2}$ associées à un même vecteur d'onde \mathbf{k}_n .

La question des polarisations est en fait un faux problème, comme on peut le voir sur les équations (1.51a) et (1.51b) en prenant en compte la transversalité des grandeurs en jeu et en utilisant les relations connues sur les doubles produits vectoriels. Plus simplement, on peut, au lieu de \mathcal{B}_n , utiliser le potentiel vecteur transverse auquel il est relié de façon univoque (compte-tenu de la transversalité de \mathcal{B}_n et $\mathcal{A}_{\perp n}$ par $\mathcal{B}_n = i\mathbf{k}_n \times \mathcal{A}_{\perp n}$. Or, compte tenu de (1.40b), les variables $\mathcal{E}_{n\perp}$ et $\mathcal{A}_{\perp n}$ sont colinéaires, et on peut donc utiliser leurs valeurs algébriques sur un axe commun, défini par la polarisation $\vec{\mathcal{E}}_{n,s}$. Les équations d'évolution (1.51a) et (1.51b) du rayonnement libre se ramènent alors à des équations scalaires

$$\frac{d\mathcal{A}_{\perp n,s}}{dt} = -\mathcal{E}_{\perp n,s} \quad (1.52a)$$

$$\frac{d\mathcal{E}_{\perp n,s}}{dt} = c^2 k_\ell^2 \mathcal{A}_{\perp n,s} . \quad (1.52b)$$

À ce stade, il est clair qu'on obtient un découplage des polarisations.

Pour résoudre le système d'équations différentielles couplées (1.52a) et (1.52b), introduisons la *variable normale*

$$\alpha_{n,s} = \frac{1}{2C_n} \left(\omega_n \mathcal{A}_{\perp n,s} - i\mathcal{E}_{\perp n,s} \right) . \quad (1.53)$$

La constante C_n est quelconque à ce niveau, mais nous la prenons réelle et nous imposons $C_{-n} = C_n$. Nous lui donnerons une valeur précise lors de la procédure de quantification. On vérifie immédiatement que $\alpha_{n,s}$ est solution de l'équation différentielle

$$\frac{d\alpha_{n,s}}{dt} = -i\omega_n\alpha_{n,s} . \quad (1.54)$$

On peut alors remarquer par exemple en utilisant (1.33), que $\alpha_{n,s}$ ne met en jeu que le mode se propageant suivant \mathbf{k}_n et que la contribution à $\alpha_{n,s}$ du mode se propageant suivant $-\mathbf{k}_n$ est nulle.

Introduisons maintenant la deuxième combinaison des équations (1.52a) et (1.52b)

$$\alpha'_{ns} = \frac{1}{2C_n} \left(\omega_n \mathcal{A}_{\perp n,s} + i\mathcal{E}_{\perp n,s} \right) . \quad (1.55)$$

Son équation d'évolution est

$$\frac{d\alpha'_{ns}}{dt} = i\omega_n\alpha_{n,s} . \quad (1.56)$$

Mais on peut remarquer, en prenant les complexes conjugués de (1.55), que

$$(\alpha'_{ns})^* = \frac{1}{2C_n} \left(\omega_n \mathcal{A}_{\perp -n,s} - i\mathcal{E}_{\perp -n,s} \right) \quad (1.57)$$

ce qui n'est autre que la définition (1.53) appliquée à la composante de Fourier suivant $-\mathbf{k}_n$, à condition d'écrire

$$\alpha_{-n,s} = (\alpha'_{ns})^* .$$

On vérifie immédiatement que l'équation d'évolution de $\alpha_{-n,s}$ est bien (1.54). De plus, si on utilise (1.33), on constate que $\alpha_{-n,s}$ ne met en jeu que le mode se propageant suivant $-\mathbf{k}_n$.

Ainsi, lorsqu'on considère la composante de Fourier \mathbf{k}_n et une polarisation particulière, on peut se borner à considérer la variable normale (1.53) qui isole la contribution du champ se propageant suivant \mathbf{k}_n , à condition de prendre en compte par ailleurs la variable normale résultant de la définition (1.53) appliquée à la composante de Fourier $-\mathbf{k}_n$ (avec la même polarisation).

Nous avons ainsi retrouvé la notion de mode ℓ , relatif à une direction de propagation \mathbf{k}_ℓ et une polarisation transverse. On peut définir une variable normale pour chaque mode, et on trouve alors que chaque mode obéit à une équation de la forme (1.54). *Les évolutions des divers modes sont découplées.*

Le raisonnement qui a été fait ici en l'absence de terme source dans les équations (1.28) se généralise en fait sans difficulté, comme nous le verrons au paragraphe 1.4.4, ce qui donne un très grand intérêt à la notion de variable normale que nous associons donc à un mode de rayonnement, par la définition

$$\Rightarrow \quad \alpha_\ell = \frac{1}{2C_\ell} (\omega_\ell \mathcal{A}_{\perp \ell} - i\mathcal{E}_{\perp \ell}) , \quad (1.58)$$

où ℓ est caractérisé par trois entiers relatifs définissant une direction de propagation \mathbf{k}_ℓ , et par une polarisation orthogonale à \mathbf{k}_ℓ . La constante C_ℓ est prise réelle, et ne dépendant que du module $k_\ell = \omega_\ell/c$ de \mathbf{k}_ℓ .

1.4.2 Analogie avec l'oscillateur harmonique

Avant de passer au problème non trivial de l'inversion des formules (1.58), nous allons illustrer la notion de variable normale dans le cas très simple de l'oscillateur harmonique classique.

Considérons un oscillateur harmonique matériel de masse m , et de fréquence propre ω_0 . L'impulsion p et la position x sont les deux variables dynamiques caractérisant l'état de l'oscillateur à un instant donné (toute grandeur de l'oscillateur s'exprime en fonction de x et p , et l'évolution future est complètement déterminée par la connaissance de x et p à un instant donné). Les équations d'évolution de x et p sont

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m} \quad (1.59a)$$

$$\frac{dp}{dt} = -m\omega_0^2 x. \quad (1.59b)$$

La variable normale

$$\alpha = x + i\frac{p}{m\omega_0} \quad (1.60)$$

et la variable complexe conjuguée α^* « diagonalisent » le système d'équations d'évolution couplées (1.59). On a en effet

$$\frac{d\alpha}{dt} = -i\omega_0 \alpha \quad (1.61)$$

et

$$\frac{d\alpha^*}{dt} = i\omega_0 \alpha^*. \quad (1.62)$$

On en tire directement la solution

$$\alpha = \alpha(0) e^{-i\omega_0 t}. \quad (1.63)$$

Dans cet exemple, la réalité de x et p permet d'inverser directement l'équation (1.60) et la complexe conjuguée pour obtenir

$$x = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^*) \quad (1.64)$$

$$p = \frac{m\omega_0}{2i}(\alpha - \alpha^*). \quad (1.65)$$

Nous allons voir que la procédure est un peu plus subtile pour les modes du rayonnement, du fait du caractère complexe des grandeurs $\mathcal{E}_{\perp\ell}$, $\mathcal{A}_{\perp\ell}$.

Remarque

L'analogie constatée ici, entre le comportement dynamique d'un mode du rayonnement libre et un oscillateur harmonique matériel, nous servira de fil conducteur lors de la quantification du rayonnement. Elle est également utilisée en physique statistique pour établir la loi de Planck qui décrit le rayonnement à l'équilibre thermodynamique⁵.

1.4.3 Expression des champs transverses en fonction des variables normales

Comme on vient de le faire pour les variables x et p de l'oscillateur harmonique, on se propose d'exprimer les champs $\mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}, t)$ et $\mathcal{A}_\perp(\mathbf{r}, t)$ en fonction des variables normales $\alpha_\ell(t)$ et $\alpha_\ell^*(t)$. Considérons d'abord le cas où une seule valeur de α_ℓ est différente de zéro, celle qui est associée à l'indice ℓ_0 . Notons d'emblée que dans le développement (1.9) des champs, les termes non nuls seront non seulement ceux correspondant à l'indice ℓ_0 , mais aussi ceux correspondant à l'indice $-\ell_0$. On sait en effet (équation 1.15) que

$$\mathcal{E}_{\perp-\ell_0} = \mathcal{E}_{\perp\ell_0}^* \quad (1.66)$$

et

$$\mathcal{A}_{\perp-\ell_0} = \mathcal{A}_{\perp\ell_0}^* \quad (1.67)$$

ou encore

$$\mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^3} \vec{\epsilon}_{\ell_0} \mathcal{E}_{\perp\ell_0} e^{i\mathbf{k}_{\ell_0} \cdot \mathbf{r}} + \text{c.c.} , \quad (1.68)$$

$$\mathbf{A}_\perp(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^3} \vec{\epsilon}_{\ell_0} \mathcal{A}_{\perp\ell_0} e^{i\mathbf{k}_{\ell_0} \cdot \mathbf{r}} + \text{c.c.} . \quad (1.69)$$

Il ne faut pas en conclure pour autant que le mode $-\ell_0$ est excité. On peut en effet avoir $\mathcal{E}_{\perp-\ell_0}$ et $\mathcal{A}_{\perp-\ell_0}$ non nuls, tout en ayant $\alpha_{-\ell_0}$ nul. Cette condition va en fait nous donner des relations supplémentaires sur $\mathbf{E}_{\perp\ell_0}$ et $\mathbf{A}_{\perp\ell_0}$, ce qui permet d'exprimer les champs (1.68) et (1.69) en fonction de α_{ℓ_0} et $\alpha_{\ell_0}^*$.

Écrivons donc les relations (1.58) pour les modes ℓ_0 et $-\ell_0$. On a d'une part

$$\alpha_{\ell_0} = \frac{1}{C_{\ell_0}} \left(\omega_{\ell_0} \mathcal{A}_{\perp\ell_0} - i \mathcal{E}_{\perp\ell_0} \right) \quad (1.70)$$

et d'autre part (en utilisant $\omega_{-\ell_0} = \omega_{\ell_0}$)

$$\alpha_{-\ell_0} = \frac{1}{2C_{-\ell_0}} \left(\omega_{\ell_0} \mathcal{A}_{\perp-\ell_0} - i \mathcal{E}_{\perp-\ell_0} \right) = 0 . \quad (1.71)$$

⁵Voir par exemple le cours de R. Balian, *Physique Statistique*, tome II, chapitre 12

En prenant le complexe conjugué de (1.71), et en tenant compte de (1.66) et (1.67), on a la relation remarquable

$$\omega_{\ell_0} \mathcal{A}_{\perp \ell_0} + i \mathcal{E}_{\perp \ell_0} = 0. \quad (1.72)$$

En combinant (1.70) et (1.72), on obtient

$$\mathcal{A}_{\perp \ell_0} = \frac{C_{\ell_0}}{\omega_{\ell_0}} \alpha_{\ell_0} = \frac{i}{\omega_{\ell_0}} \mathcal{E}_{\perp \ell_0} \quad (1.73)$$

d'où l'expression des champs

$$\mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^3} \frac{C_{\ell_0}}{\omega_{\ell_0}} \vec{\epsilon}_{\ell_0} \alpha_{\ell_0}(t) e^{i\mathbf{k}_{\ell_0} \cdot \mathbf{r}} + \text{c.c.} \quad (1.74)$$

et

$$\mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{r}, t) = i \left(\frac{1}{L^3} C_{\ell_0} \vec{\epsilon}_{\ell_0} \alpha_{\ell_0}(t) e^{i\mathbf{k}_{\ell_0} \cdot \mathbf{r}} - \text{c.c.} \right). \quad (1.75)$$

Dans le cas général où tous les modes peuvent a priori être excités ($\alpha_{\ell} \neq 0$), il suffit de regrouper les termes correspondant aux modes opposés ℓ et $-\ell$, en tenant compte des relations (1.66) et (1.67), pour généraliser les expressions des champs en

$$\mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^3} \sum_{\ell} \frac{C_{\ell}}{\omega_{\ell}} \vec{\epsilon}_{\ell} \alpha_{\ell}(t) e^{i\mathbf{k}_{\ell} \cdot \mathbf{r}} + \text{c.c.} \quad (1.76)$$

$$\mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{L^3} \sum_{\ell} \left(C_{\ell} \vec{\epsilon}_{\ell} \alpha_{\ell}(t) e^{i\mathbf{k}_{\ell} \cdot \mathbf{r}} - \text{c.c.} \right). \quad (1.77)$$

On peut également exprimer le champ magnétique en fonction des $\alpha_{\ell}(t)$, sous la forme

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{L^3} \sum_{\ell} \left(C_{\ell} \frac{\mathbf{k}_{\ell} \times \vec{\epsilon}_{\ell}}{\omega_{\ell}} \alpha_{\ell}(t) e^{i\mathbf{k}_{\ell} \cdot \mathbf{r}} - \text{c.c.} \right) \quad (1.78)$$

Chacune des expressions ci-dessus fait apparaître un terme et la quantité complexe conjuguée, ce qui amène à utiliser la notation suivante, par exemple dans le cas du champ électrique

$$\mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{\perp}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_{\perp}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \quad (1.79)$$

avec

$$\mathbf{E}_{\perp}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{L^3} \sum_{\ell} C_{\ell} \vec{\epsilon}_{\ell} \alpha_{\ell}(t) e^{i\mathbf{k}_{\ell} \cdot \mathbf{r}} \quad (1.80)$$

et

$$\mathbf{E}_{\perp}^{(-)}(\mathbf{r}, t) = \left(\mathbf{E}_{\perp}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \right)^* \quad (1.81)$$

Les équations (1.76) à (1.78) sont très importantes (éventuellement réécrites sous la forme 1.79). Ce sont elles que nous utiliserons – généralisées à des opérateurs – pour décrire les observables du champ quantifié. Il est facile de se convaincre qu’elles restent vraies même en présence de courants, c’est-à-dire d’un terme source dans l’équation (1.51b) ou (1.52b). En revanche, l’équation d’évolution des variables normales est alors moins simple que (1.54), comme nous allons le voir maintenant.

Remarques

(i) La tradition veut que $\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ s’appelle « partie de fréquences positives ». On prendra garde à ne pas se laisser tromper par ce vocabulaire, qui peut apparaître contradictoire avec l’expression explicite de $\mathbf{E}^{(+)}$ dans le cas du champ libre (cf. équation (1.57)) :

$$\mathbf{E}_{\perp}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{L^3} \sum_{\ell} C_{\ell} \vec{\epsilon}_{\ell} e^{i\mathbf{k}_{\ell} \cdot \mathbf{r}} \alpha_{\ell}(0) e^{-i\omega_{\ell} t}. \quad (1.82)$$

(ii) Le champ complexe $\mathbf{E}_{\perp}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ introduit en (1.79) et (1.80) est parfois appelé *signal analytique*. Il s’agit de la généralisation de la notion de grandeur complexe associée à une grandeur réelle oscillant sinusoidalement. Notons que si la définition (1.79) est celle le plus souvent utilisée dans les ouvrages d’optique quantique, on peut également définir une grandeur complexe deux fois plus grande telle que la grandeur réelle en soit la partie réelle. Le choix entre les deux définitions a une conséquence sur les termes non-linéaires comme le vecteur de Poynting.

1.4.4 Évolution des variables normales

Lorsque la composante transverse du courant n’est pas nulle, l’équation (1.52b) possède un terme source, qui s’obtient à partir de (1.28b), et elle doit être remplacée par

$$\frac{d\mathcal{E}_{\perp\ell}}{dt} - c^2 k_{\ell}^2 \mathcal{A}_{\perp\ell} = \frac{1}{\varepsilon_0} \mathcal{J}_{\ell} \quad (1.83)$$

avec

$$\mathcal{J}_{\ell} = \iiint_{(V)} d^3r \vec{\epsilon}_{\ell} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}_{\ell} \cdot \mathbf{r}} \quad (1.84)$$

(la projection sur $\vec{\epsilon}_{\ell}$ est automatiquement transverse). En combinant cette équation à (1.52a), et en gardant la définition (1.58) des variables normales, on obtient l’équation d’évolution

$$\implies \frac{d\alpha_{\ell}}{dt} + i\omega_{\ell} \alpha_{\ell} = \frac{i}{\varepsilon_0 C_{\ell}} \mathcal{J}_{\ell}. \quad (1.85)$$

Ainsi, partant des équations de Maxwell avec sources, nous avons obtenu l’équation (1.81), qui permet d’obtenir les $\alpha_{\ell}(t)$, et donc les champs transverses. L’ensemble des équations (1.81) relatives à tous les modes est donc équivalent aux équations de Maxwell relatives au rayonnement. Mais *l’introduction des variables normales nous a permis d’obtenir des équations d’évolution découplées* : chaque variable normale évolue indépendamment des autres.

On notera néanmoins que ce découplage n'est complet que si les courants transverses $\mathbf{j}_\perp(t)$ sont imposés de l'extérieur, c'est-à-dire ne sont pas des variables dynamiques du problème. En revanche, si les courants $\mathbf{j}_\perp(t)$ ont pour origine des mouvements de charge sous l'effet (en partie ou en totalité) des champs \mathbf{E}_\perp et \mathbf{B}_\perp eux-mêmes, $\mathbf{j}_\perp(t)$ sera en général lié à l'évolution d'autres modes α_ℓ , entraînant un couplage entre différentes variables normales. C'est le cas par exemple en optique non linéaire.

1.4.5 Description spatio-temporelle du champ libre

Dans le cas où il n'y a pas de courants sources l'évolution temporelle de chaque variable est donnée par l'équation (1.81) sans second membre. On a donc

$$\alpha_\ell(t) = \alpha_\ell(t=0) e^{-i\omega_\ell t} \quad (1.86)$$

que l'on écrit pour simplifier

$$\alpha_\ell(t) = \alpha_\ell e^{-i\omega_\ell t} . \quad (1.87)$$

L'expression des champs transverses se déduit des expressions (1.76) à (1.78). On obtient ainsi

$$\mathbf{A}_\perp(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^3} \sum_\ell \frac{C_\ell}{\omega_\ell} \vec{\epsilon}_\ell \alpha_\ell \exp i(\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r} - \omega_\ell t) + \text{c.c.} , \quad (1.88)$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{L^3} \sum_\ell \left(C_\ell \vec{\epsilon}_\ell \alpha_\ell \exp i(\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r} - \omega_\ell t) + \text{c.c.} \right) , \quad (1.89)$$

$$\mathbf{B}_\perp(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{L^3} \sum_\ell \left(C_\ell \frac{\mathbf{k}_\ell \times \vec{\epsilon}_\ell}{\omega_\ell} \alpha_\ell \exp i(\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r} - \omega_\ell t) + \text{c.c.} \right) . \quad (1.90)$$

Nous venons ainsi d'établir le résultat important suivant : *dans l'espace vide de charges, la solution dynamique générale des équations de Maxwell est une superposition d'ondes planes monochromatiques indépendantes.* Les champs électrique et magnétique sont connus en tout point de l'espace et à tout instant lorsqu'on s'est donné la valeur de tous les coefficients complexes α_ℓ à un instant initial donné.

Remarque

Les expressions ci-dessus donnent la décomposition du champ libre sur la base des ondes planes progressives $e^{i(\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r} - \omega_\ell t)}$. Rien n'interdit d'utiliser d'autres bases de l'espace des fonctions, les ondes planes stationnaires, ou bien les ondes sphériques par exemple. Le choix judicieux d'une base appropriée permet souvent de simplifier la résolution d'un problème particulier.

1.5 Énergie et impulsion du champ de rayonnement

Nous venons de voir comment l'introduction des variables normales permet de mettre en évidence l'intérêt de décomposer le champ de rayonnement sur les modes ℓ , ce qui

simplifie considérablement la description des champs, puisqu'il suffit de connaître le paramètre α_ℓ décrivant l'évolution de chaque mode. Nous allons voir que cette décomposition est également fructueuse lorsqu'on s'intéresse à l'énergie et à l'impulsion du rayonnement.

1.5.1 Énergie du champ de rayonnement. Découplage des modes

L'énergie H_{trans} du champ de rayonnement, ou champ transverse, est l'intégrale sur tout le volume V de la densité d'énergie du champ transverse. Elle s'écrit :

$$\implies H_{\text{trans}} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{(V)} d^3r \left(\mathbf{E}_\perp^2(\mathbf{r}, t) + c^2 \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t) \right). \quad (1.91)$$

Elle prend une forme particulièrement intéressante lorsqu'on l'exprime dans l'espace réciproque ou en fonction des variables normales.

Exprimons tout d'abord H_{trans} en fonction de $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\perp n}$ et $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\perp n}$, en utilisant la relation de Parseval-Plancherel (1.14b) et la relation (1.40a) :

$$H_{\text{trans}} = \frac{\varepsilon_0}{2L^3} \sum_n [|\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\perp n}|^2 + \omega_n^2 |\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\perp n}|^2] \quad (1.92)$$

En tenant compte de l'existence de deux polarisations pour chaque composante \mathbf{k}_n , on met l'énergie transverse sous la forme

$$H_{\text{trans}} = \frac{\varepsilon_0}{2L^3} \sum_{n,s} (|\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\perp n,s}|^2 + \omega_n^2 |\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\perp n,s}|^2). \quad (1.93)$$

Le passage aux modes ℓ demande un peu d'attention. On peut directement introduire les variables normales en utilisant les définitions (1.53) et (1.58), qui permettent d'écrire

$$\alpha_\ell = \alpha_{n,s} = \frac{1}{2C_n} \left(\omega_n \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\perp n,s} - i \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\perp n,s} \right), \quad (1.94)$$

$$\alpha_{-\ell} = \alpha_{-n,s} = \frac{1}{2C_n} \left(\omega_n \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\perp -n,s} - i \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\perp -n,s} \right). \quad (1.95)$$

Dans le calcul de $|\alpha_\ell|^2 + |\alpha_{-\ell}|^2$, les termes croisés vont donner des contributions opposées à cause des relations (1.15), et on trouve

$$|\alpha_\ell|^2 + |\alpha_{-\ell}|^2 = \frac{1}{4C_n^2} \left(\omega_n^2 |\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\perp n,s}|^2 + |\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\perp n,s}|^2 + \omega_n^2 |\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\perp -n,s}|^2 + |\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\perp -n,s}|^2 \right). \quad (1.96)$$

L'expression (1.93) peut donc se transformer en

$$\implies H_{\text{trans}} = 2\varepsilon_0 \frac{C_\ell^2}{L^3} |\alpha_\ell|^2. \quad (1.97)$$

Notons qu'une manipulation analogue à celle qui a permis de passer de (1.93) à (1.96) va conduire à l'expression de H_{trans} en fonction des composantes $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\perp \ell}$ et $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\perp \ell}$:

$$\implies H_{\text{trans}} = \frac{\varepsilon_0}{2L^3} \sum_\ell \left(|\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\perp \ell}|^2 + \omega_\ell^2 |\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\perp \ell}|^2 \right). \quad (1.98)$$

En définitive, l'énergie du champ de rayonnement apparaît comme la somme d'énergies associées à chaque mode. De plus, l'énergie d'un mode est déterminée par un seul nombre : le module de la variable normale α_ℓ .

Remarque

Les expressions de l'énergie obtenues dans l'espace réciproque seront très utiles pour effectuer la quantification du champ électromagnétique (voir Chapitre 2). En revanche, ce ne sont pas nécessairement les plus utiles lorsqu'il s'agit simplement de calculer l'énergie, pour laquelle l'expression (1.91) est souvent très commode.

1.5.2 Impulsion du champ de rayonnement⁶

L'impulsion du champ transverse est proportionnelle à l'intégrale sur le volume V du vecteur de Poynting $\mathbf{\Pi} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$. On peut l'écrire plus précisément⁷ :

$$\Rightarrow \quad \mathbf{P}_{\text{trans}} = \frac{1}{c^2} \int d^3r \mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \int d^3r \mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}_\perp(\mathbf{r}, t). \quad (1.99)$$

En utilisant l'égalité de Parseval-Plancherel, on peut aussi l'écrire :

$$\mathbf{P}_{\text{trans}} = \frac{\varepsilon_0}{L^3} \sum_n \mathcal{E}_{\perp n}^* \times \mathcal{B}_n. \quad (1.100)$$

En exprimant \mathcal{B}_n en fonction du potentiel vecteur transverse (1.40a), et en utilisant le fait que $\mathbf{k}_n \cdot \mathcal{E}_{\perp n}^* = 0$, on obtient l'expression suivante de $\mathbf{P}_{\text{trans}}$ en fonction des variables $\mathcal{E}_{\perp n}$ et $\mathcal{A}_{\perp n}$:

$$\mathbf{P}_{\text{trans}} = \frac{i\varepsilon_0}{L^3} \sum_n (\mathcal{E}_{\perp n}^* \cdot \mathcal{A}_{\perp n}) \mathbf{k}_n. \quad (1.101)$$

En utilisant une démarche similaire à celle du paragraphe 1.5.1, on peut exprimer $\mathbf{P}_{\text{trans}}$ en fonction des variables normales, sous la forme :

$$\Rightarrow \quad \mathbf{P}_{\text{trans}} = \sum_\ell \frac{2\varepsilon_0 C_\ell^2}{\omega_\ell L^3} |\alpha_\ell|^2 \mathbf{k}_\ell. \quad (1.102)$$

L'impulsion totale du rayonnement est donc la somme d'impulsions associées à chaque mode. L'impulsion d'un mode est dirigée selon le vecteur d'onde \mathbf{k}_ℓ de ce mode. Elle est proportionnelle à $|\alpha_\ell|^2$, qui caractérise donc d'une certaine manière « l'excitation » du mode.

Remarque

La décomposition (1.102) est liée au choix spécifique d'un développement du champ en ondes planes. Si on choisit une autre base, on n'obtient pas l'impulsion totale sous la forme d'une somme d'impulsions associées à chaque mode, à la différence de l'énergie pour laquelle (1.97) reste valable.

⁶Conformément à l'usage, nous utilisons le mot « impulsion » comme synonyme de « quantité de mouvement ». Nous utiliserons l'expression « impulsion généralisée » pour qualifier les quantités conjuguées des coordonnées généralisées dans le formalisme Lagrangien.

⁷Voir E. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley (New York 1975), Section (6.9), ou bien R. Feynman, *Lectures in Physics*, Tome II.2.

1.6 Énergie et impulsion du système {champ + particules}

1.6.1 Constantes du mouvement pour le système global

Lorsqu'on est en présence de différents systèmes physiques en interaction mutuelle, il est utile de savoir s'il existe des quantités conservées pour le système global au cours de l'évolution. Leur identification simplifie considérablement la résolution des problèmes. Dans le cas d'un système isolé quelconque de particules chargées interagissant par l'intermédiaire du champ électromagnétique, ces constantes du mouvement sont au moins au nombre de sept : l'énergie, les trois composantes de l'impulsion totale et celles du moment cinétique du système. Ce sont ces quantités que nous étudions dans cette partie. Elles nous seront utiles dans les chapitres suivants.

a. Énergie

L'énergie totale H du système {champ + particules} a pour expression :

$$\Rightarrow H = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}^2 + \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r \left(\mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + c^2 \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t) \right). \quad (1.103)$$

En utilisant la relation de Parseval-Plancherel, on peut aussi l'exprimer en fonction des champs dans l'espace réciproque :

$$\Rightarrow H = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}^2 + \frac{\varepsilon_0}{2L^3} \sum_n \left[|\boldsymbol{\mathcal{E}}_n|^2 + c^2 |\boldsymbol{\mathcal{B}}_n|^2 \right]. \quad (1.104)$$

Pour démontrer que H est une constante du mouvement, dérivons (1.104) par rapport au temps :

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \cdot \frac{d\mathbf{v}_{\alpha}}{dt} + \frac{\varepsilon_0}{2L^3} \sum_n \left(\boldsymbol{\mathcal{E}}_n \cdot \frac{d\boldsymbol{\mathcal{E}}_n^*}{dt} + c^2 \boldsymbol{\mathcal{B}}_n \cdot \frac{d\boldsymbol{\mathcal{B}}_n^*}{dt} + c.c. \right) \quad (1.105)$$

Exprimons $d\mathbf{v}_{\alpha}/dt$ à l'aide de l'équation de Lorentz (2.1.22), $d\boldsymbol{\mathcal{E}}_n/dt$ et $d\boldsymbol{\mathcal{B}}_n/dt$ à l'aide des équation (1.16c) et (1.16d). Nous trouvons, puisque $\mathbf{v}_{\alpha} \cdot (\mathbf{v}_{\alpha} \times \mathbf{B}) = 0$:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_{\alpha}, t) + \frac{\varepsilon_0 c^2}{2L^3} \sum_n \left[\boldsymbol{\mathcal{E}}_n \cdot \left(-i\mathbf{k}_n \times \boldsymbol{\mathcal{B}}_n^* - \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{j}_n^* \right) + i\boldsymbol{\mathcal{B}}_n \cdot (\mathbf{k}_n \times \boldsymbol{\mathcal{E}}_n^*) + c.c. \right]. \quad (1.106)$$

La somme portant sur les particules peut aussi s'écrire, d'après (1.8) :

$$\int d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2L^3} \sum_n (\boldsymbol{\mathcal{E}}_n \cdot \mathbf{j}_n^* + \boldsymbol{\mathcal{E}}_n^* \cdot \mathbf{j}_n). \quad (1.107)$$

Elle compense exactement le deuxième terme de la somme sur n dans (1.106). En utilisant les propriétés de permutation du produit mixte, on montre facilement que la somme des quatre

termes du type $\boldsymbol{\mathcal{E}}_n \cdot (\mathbf{k}_n \times \boldsymbol{\mathcal{B}}_n^*)$ est nulle. La dérivée dH/dt est donc nulle et H est une constante du mouvement.

Il est important de noter que, dans (1.103) ou (1.104), H apparaît *de manière exacte* sous la forme d'une somme de deux termes, l'un relatif à l'énergie cinétique des particules et l'autre relatif à l'énergie du champ électromagnétique total. L'absence apparente de termes d'interaction entre champ et particules tient au fait que ceux-ci sont dissimulés dans l'énergie du champ électrique longitudinal, comme nous le montrons plus loin (équation 1.133).

b. Impulsion

L'impulsion totale \mathbf{P} du système s'écrit :

$$\Rightarrow \quad \mathbf{P} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} + \varepsilon_0 \int d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) . \quad (1.108)$$

Son expression en fonction des champs dans l'espace réciproque est :

$$\mathbf{P} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} + \frac{\varepsilon_0}{2L^3} \sum_n (\boldsymbol{\mathcal{E}}_n^* \times \boldsymbol{\mathcal{B}}_n + \boldsymbol{\mathcal{E}}_n \times \boldsymbol{\mathcal{B}}_n^*) . \quad (1.109)$$

L'impulsion totale apparaît donc, comme l'énergie totale, sous la forme d'une somme de deux termes, l'un relatif aux particules et l'autre relatif au champ total.

Pour montrer que \mathbf{P} est une constante du mouvement, calculons la dérivée temporelle de \mathbf{P} :

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \frac{d\mathbf{v}_{\alpha}}{dt} + \frac{\varepsilon_0}{2L^3} \sum_n \left(\frac{d\boldsymbol{\mathcal{E}}_n^*}{dt} \times \boldsymbol{\mathcal{B}}_n + \boldsymbol{\mathcal{E}}_n^* \times \frac{d\boldsymbol{\mathcal{B}}_n}{dt} + \text{c.c.} \right) \quad (1.110)$$

En utilisant les expressions de $d\mathbf{v}_{\alpha}/dt$, $d\boldsymbol{\mathcal{E}}_n/dt$, $d\boldsymbol{\mathcal{B}}_n/dt$ fournies par les équations du mouvement, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}}{dt} = & \sum_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{E}(\mathbf{r}_{\alpha}, t) + \sum_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_{\alpha}, t) + \frac{\varepsilon_0 c^2}{2L^3} \sum_n \left[\left(-i\mathbf{k}_n \times \boldsymbol{\mathcal{B}}_n^* - \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{j}_n^* \right) \times \boldsymbol{\mathcal{B}}_n \right. \\ & \left. + \frac{1}{c^2} \boldsymbol{\mathcal{E}}_n^* \times (-i\mathbf{k}_n \times \boldsymbol{\mathcal{E}}_n) + \text{c.c.} \right] \end{aligned} \quad (1.111)$$

Le terme dû à la force magnétique peut aussi s'écrire :

$$\int d^3r \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2L^3} \sum_n (\mathbf{j}_n^* \times \boldsymbol{\mathcal{B}}_n + \mathbf{j}_n \times \boldsymbol{\mathcal{B}}_n^*) \quad (1.112)$$

Il compense les termes en \mathbf{j}_n et \mathbf{j}_n^* dans la somme sur n de (1.111). Les termes dépendant du champ magnétique s'écrivent :

$$i(\mathbf{k}_n \times \boldsymbol{\mathcal{B}}_n^*) \times \boldsymbol{\mathcal{B}}_n - i(\mathbf{k}_n \times \boldsymbol{\mathcal{B}}_n) \times \boldsymbol{\mathcal{B}}_n^* = i(\mathbf{k}_n \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}}_n) \boldsymbol{\mathcal{B}}_n^* - i(\mathbf{k}_n \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}}_n^*) \boldsymbol{\mathcal{B}}_n \quad (1.113)$$

Il sont nuls à cause de la transversalité de $\boldsymbol{\mathcal{B}}_n$. Les termes dépendant du champ électrique s'écrivent :

$$-i\boldsymbol{\mathcal{E}}_n^* \times (\mathbf{k}_n \times \boldsymbol{\mathcal{E}}_n) + i\boldsymbol{\mathcal{E}}_n \times (\mathbf{k}_n \times \boldsymbol{\mathcal{E}}_n^*) = i(\mathbf{k}_n \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_n^*) \boldsymbol{\mathcal{E}}_n - i(\mathbf{k}_n \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_n) \boldsymbol{\mathcal{E}}_n^* = -\frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_n^* \boldsymbol{\mathcal{E}}_n + \rho_n \boldsymbol{\mathcal{E}}_n^*) \quad (1.114)$$

en utilisant l'équation de Maxwell (1.16a). À cause de la relation de Parseval-Plancherel, ce dernier terme compense exactement le terme dû à la force électrique dans (1.111). On a donc bien montré que $d\mathbf{P}/dt = 0$. Cette démonstration peut aussi être considérée comme une justification de l'expression (1.99) de l'impulsion du champ.

1.6.2 Séparation des variables longitudinales et transverses dans les différentes constantes du mouvement

Nous avons détaillé dans la partie 1.5 de ce chapitre les expressions de l'énergie et de l'impulsion du champ transverse, ou champ de rayonnement. Nous allons voir maintenant qu'il est possible d'écrire l'énergie et l'impulsion du système global sous la forme d'une somme de termes correspondant aux champs longitudinaux et transverses, qui ont des statuts physiques différents. Commençons par déterminer la partie relative au champ longitudinal dans l'impulsion et l'énergie du champ.

a. Impulsion

Appelons $\mathbf{P}_{\text{long}}(\mathbf{r}, t)$ la contribution du champ électrique longitudinal à l'impulsion (1.108). Celle-ci s'écrit :

$$\mathbf{P}_{\text{long}} = \varepsilon_0 \int d^3r \mathbf{E}_{//}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\varepsilon_0}{L^3} \sum_n \boldsymbol{\mathcal{E}}_{//n}^* \times \boldsymbol{\mathcal{B}}_n \quad (1.115)$$

D'après (1.25b), $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{//n}$ est relié à la densité instantanée de charges, et on peut écrire :

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{//n} = -\frac{i \mathbf{k}_n}{\varepsilon_0 k_n^2} \rho_n \quad (1.116)$$

Par ailleurs, $\boldsymbol{\mathcal{B}}_n$ s'exprime en fonction du potentiel vecteur $\boldsymbol{\mathcal{A}}_n$ (relation 1.39). Il vient donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{long}} &= -\frac{1}{L^3} \sum_n \rho_n^* \frac{\mathbf{k}_n}{k_n^2} \times (\mathbf{k}_n \times \boldsymbol{\mathcal{A}}_n) \\ &= \frac{1}{L^3} \sum_n \rho_n^* \left[\boldsymbol{\mathcal{A}}_n - \frac{(\mathbf{k}_n \cdot \boldsymbol{\mathcal{A}}_n) \mathbf{k}_n}{k_n^2} \right] \end{aligned} \quad (1.117)$$

Le terme entre crochets n'est autre, d'après (1.24), que la partie purement transverse du potentiel vecteur, de sorte que

$$\mathbf{P}_{\text{long}} = \frac{1}{L^3} \sum_n \rho_n^* \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\perp n} \quad (1.118)$$

soit, en utilisant à nouveau l'égalité de Parseval-Plancherel et l'équation (1.8) :

$$\mathbf{P}_{\text{long}} = \int d^3r \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}_{\alpha}, t) \quad (1.119)$$

L'expression finale de $\mathbf{P}_{\text{long}}(\mathbf{r}, t)$, particulièrement simple, est indépendante de tout choix de jauge, puisque la partie transverse de \mathbf{A} est elle-même indépendante de la jauge.

L'impulsion du champ longitudinal s'exprime donc uniquement en fonction des coordonnées de chaque particule chargée, ce qui suggère d'introduire pour chacune de ces particules la quantité :

$$\implies \quad \mathbf{p}_\alpha = m_\alpha \mathbf{v}_\alpha + q_\alpha \mathbf{A}_\perp(\mathbf{r}_\alpha, t) \quad (1.120)$$

Cette nouvelle variable appelée *impulsion généralisée*, que nous avons déjà rencontrée dans le chapitre 2 du cours « Optique Quantique 1 » à propos de l'interaction d'une particule avec un champ classique (paragraphe 2.2.2), joue un rôle important en électrodynamique. Elle apparaît dans le formalisme Lagrangien et Hamiltonien de l'électrodynamique classique écrite en jauge de Coulomb comme variable canonique conjuguée de la position \mathbf{r}_α de la particule⁸. Dans la théorie quantique correspondante, c'est l'opérateur associé à \mathbf{p}_α (et non pas $m\mathbf{v}_\alpha$) qui est représenté par l'opérateur $-i\hbar\nabla_\alpha$, et dont le commutateur avec $\hat{\mathbf{r}}_\alpha$ vaut $i\hbar$. Ce résultat est compatible avec le raisonnement du paragraphe B.2.b du chapitre 2 du cours « Optique Quantique 1 » : la vitesse \mathbf{v}_α d'une particule n'est pas égale à \mathbf{p}_α/m en présence d'un champ électromagnétique, mais plutôt à

$$\implies \quad \mathbf{v}_\alpha = \frac{1}{m_\alpha} \left(\mathbf{p}_\alpha - q_\alpha \mathbf{A}_\perp(\mathbf{r}_\alpha, t) \right) \quad (1.121)$$

L'impulsion totale (1.108) du système champ + particules peut finalement s'écrire uniquement en fonction des champs transverses et des variables \mathbf{p}_α :

$$\implies \quad \mathbf{P} = \sum_\alpha \mathbf{p}_\alpha + \varepsilon_0 \int d^3r \mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (1.122)$$

En termes de variables dynamiques du système, le premier terme dans (1.122) ne dépend que des variables décrivant les particules, tandis que le deuxième est l'impulsion du champ transverse (1.99), qui ne dépend que des variables du rayonnement.

Remarque

Le moment cinétique \mathbf{J} total du système est la troisième constante du mouvement. Le moment cinétique par rapport à l'origine des coordonnées a pour expression

$$\mathbf{J} = \sum_\alpha \mathbf{r}_\alpha(t) \times m_\alpha \mathbf{v}_\alpha(t) + \varepsilon_0 \int d^3r \mathbf{r} \times \left(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right) \quad (1.123)$$

Par un raisonnement à bien des égards analogue à ceux du paragraphe 1.6.1, on montre que $d\mathbf{J}/dt = 0$ pour un système isolé de champs et de particules. On montre également que le moment cinétique s'exprime en fonction de l'impulsion généralisée, sous la forme :

$$\mathbf{J} = \sum_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha + \varepsilon_0 \int d^3r \mathbf{r} \times \left[\mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right] \quad (1.124)$$

\mathbf{J} apparaît donc simplement comme la somme des moments des impulsions généralisées \mathbf{p}_α et du moment par rapport à l'origine de la densité d'impulsion du champ transverse $\varepsilon_0 \mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Comme pour l'impulsion, on a donc pu séparer dans le moment cinétique la contribution des particules et celle du champ de rayonnement.

⁸Voir CDG 1 Chapitre II.B.

b. Énergie

À cause de l'orthogonalité des champs électriques transverses et longitudinaux dans l'espace réciproque, l'énergie $H_{\text{e.m.}}$ du champ électromagnétique dans les expressions (1.103) ou (1.104) se sépare naturellement en deux parties :

$$\begin{aligned} H_{\text{e.m.}} &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r \left[\mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + c^2 \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t) \right] \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2L^3} \sum_n \left[|\mathcal{E}_{\parallel n}|^2 + |\mathcal{E}_{\perp n}|^2 + c^2 |\mathcal{B}_{\perp n}|^2 \right] = H_{\text{long}} + H_{\text{trans}} \end{aligned} \quad (1.125)$$

L'énergie H_{trans} , du champ de rayonnement, donnée par (1.91) ou (1.92), a été étudiée dans la partie 1.5. Le terme H_{long} relatif au champ électrique longitudinal peut aussi s'écrire, d'après (1.116) et (1.17) :

$$H_{\text{long}} = \frac{\varepsilon_0}{2L^3} \sum_n |\mathcal{E}_{\parallel n}|^2 = \frac{1}{2\varepsilon_0 L^3} \sum_n \frac{|\rho_n|^2}{k_n^2} = \frac{1}{2\varepsilon_0 L^3} \sum_n \sum_{\alpha, \beta} \frac{1}{k_n^2} q_\alpha q_\beta e^{-i\mathbf{k}_n \cdot (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta)} \quad (1.126)$$

Considérons d'abord le terme relatif à une seule particule dans la somme sur α et β ($\alpha = \beta$). Il s'écrit, en utilisant la relation (1.11) :

$$\frac{q_\alpha^2}{2\varepsilon_0 L^3} \sum_n \frac{1}{k_n^2} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{q_\alpha^2}{2\varepsilon_0 (2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{k^2} \quad (1.127)$$

On se convainc facilement que cette intégrale diverge. Le caractère divergent de ce terme « d'énergie propre » est bien connu en électrodynamique : il résulte du fait que l'énergie coulombienne propre d'une particule ponctuelle est infinie. Ce terme ne variant pas au cours de l'évolution, il constitue un simple décalage de l'origine des énergies. En retranchant les termes de « self-énergie » à l'énergie totale, l'énergie du champ électrique longitudinal (1.126) se réduit à une somme dans laquelle α et β sont différents. En passant à la limite $L \rightarrow \infty$, on trouve :

$$H_{\text{long}} = \frac{1}{2\varepsilon_0 (2\pi)^3} \sum_{\alpha \neq \beta} q_\alpha q_\beta \int d^3k \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta)}}{k^2} = \sum_{\alpha \neq \beta} \frac{q_\alpha q_\beta}{8\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|} \quad (1.128)$$

en utilisant le fait que la transformée de Fourier de $1/k^2$ est $1/r$. Cette énergie⁹ n'est autre que l'énergie d'interaction coulombienne instantanée V_{coul} entre les différentes particules ponctuelles de charges q_α .

L'énergie totale (1.103) du système s'écrit finalement :

$$\implies H = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \mathbf{v}_\alpha^2 + V_{\text{coul}} + H_{\text{trans}} \quad (1.129)$$

Elle est la somme de l'énergie cinétique des particules, de leur énergie d'interaction coulombienne et de l'énergie du champ transverse ou champ de rayonnement, H_{trans} ,

⁹Notons que dans (1.128), il faut additionner la contribution de la paire (α, β) et celle de la paire (β, α) .

donnée par les expressions (1.91), (1.92) ou (1.97), (1.98). On peut enfin exprimer \mathbf{v}_α en fonction de l'impulsion généralisée des particules \mathbf{p}_α définie par la relation (1.120) et obtenir l'énergie sous la forme :

$$\Rightarrow H = \sum_{\alpha} \frac{1}{2m_{\alpha}} \left(\mathbf{p}_{\alpha} - q_{\alpha} \mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}_{\alpha}, t) \right)^2 + V_{\text{coul}} + H_{\text{trans}} \quad (1.130)$$

où l'énergie d'interaction coulombienne V_{coul} est égale à H_{long} donné par l'équation (1.128). La forme (1.130) de l'énergie est particulièrement importante aussi bien en électrodynamique classique qu'en électrodynamique quantique. Elle est à la base de la formulation hamiltonienne la plus courante de l'électrodynamique classique¹⁰. Nous l'avons déjà rencontrée au chapitre 2 du cours « Optique Quantique 1 » dans le cas de l'interaction avec un champ électromagnétique extérieur (Équation 2.B.6). Mais surtout, en ce qui nous concerne ici, cette forme est particulièrement intéressante en jauge de Coulomb où le potentiel vecteur se réduit à sa partie transverse. L'expression (1.130) correspond alors à l'expression de l'hamiltonien en théorie quantique. *Elle servira donc de point de départ pour construire la théorie quantique* du système « champ + particules » dans les chapitres suivants.

Comme annoncé plus haut, il est intéressant de développer le carré dans l'expression (1.130). On fait ainsi apparaître trois termes dans l'énergie :

$$\Rightarrow H = H_p + H_{\text{trans}} + H_I \quad (1.131)$$

La première contribution, H_p , est celle des particules :

$$\Rightarrow H_p = \sum_{\alpha} \frac{\mathbf{p}_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} + V_{\text{coul}} . \quad (1.132)$$

Elle décrit les charges en interaction coulombienne en l'absence de rayonnement. C'est elle que l'on utilise pour décrire un atome, qui n'est autre qu'un ensemble de charges en interaction coulombienne, tout au moins tant qu'on ignore les moments magnétiques associés aux spins des particules.

Le deuxième terme, H_{trans} , est relatif au rayonnement seul étudié dans la partie 1.5. Il existe même en l'absence de toute particule.

Enfin le dernier terme, H_I , décrit le couplage entre les particules chargées et le champ de rayonnement (champ transverse) :

$$\Rightarrow H_I = \sum_{\alpha} \left(-\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \mathbf{p}_{\alpha} \cdot \mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}_{\alpha}, t) + \frac{q_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} \mathbf{A}_{\perp}^2(\mathbf{r}_{\alpha}, t) \right) \quad (1.133)$$

C'est lui qui permettra de décrire les divers processus d'*interaction matière-rayonnement*.

¹⁰Landau et Lifshitz, *Théorie des champs*, p. 67 (édition Mir).

1.7 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de considérer les équations de Maxwell du point de vue de l'espace réciproque. Nous avons ainsi établi quelques résultats importants pour les chapitres suivants.

Nous avons d'abord montré qu'on pouvait décomposer les champs en une partie longitudinale, liée aux charges, et une partie transverse, douée d'une dynamique propre et existant même en l'absence de charges : le *champ de rayonnement*.

Le champ de rayonnement a pu être décomposé en différents *modes* dont les dynamiques sont *découplées dans le vide*. Nous avons montré que l'on peut exprimer l'énergie et l'impulsion du rayonnement sous la forme d'une somme de termes relatifs à chacun des modes, qui sont « excités » proportionnellement à la quantité $|\alpha_\ell|^2$ (relations 1.97 et 1.102). L'analogie entre ces différents modes et un ensemble d'oscillateurs harmoniques, qui a été soulignée à plusieurs reprises, sera utilisée dans le chapitre 2 sur la quantification du rayonnement. Nous avons enfin obtenu l'expression (1.133) de l'hamiltonien d'interaction qui nous servira dans le chapitre 3 à décrire l'interaction entre un atome et le champ électromagnétique quantifié.

Complément 1A

La jauge de Lorentz : potentiels retardés

Pour certains problèmes, par exemple ceux où les notions d'invariance explicite par transformation de Lorentz sont essentielles, ou dans les calculs de rayonnement de charges accélérées (voir Complément 1B), la jauge de Coulomb n'est pas la mieux adaptée. On peut alors choisir la jauge de Lorentz qui est définie, dans l'espace réel, par la relation

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad (1A.1)$$

ou encore dans l'espace réciproque, par :

$$i\mathbf{k}_n \cdot \mathcal{A}_n + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \mathcal{U}_n = 0 \quad (1A.2)$$

En particulier, le complément (IV.1) sur le rayonnement du dipôle utilisera cette jauge.

En portant cette expression de $\mathbf{k}_n \cdot \mathcal{A}_{//n}$ dans (??), nous obtenons l'équation d'évolution du potentiel scalaire en jauge de Lorentz :

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{U}_n + k_n^2 \mathcal{U}_n = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_n \quad (1A.3)$$

En dérivant l'équation (??) par rapport au temps, il est possible d'éliminer $d\mathcal{U}_n/dt$ entre cette équation et (1A.2). En utilisant de plus l'équation de conservation de la charge, nous obtenons l'équation d'évolution de la composante longitudinale du potentiel vecteur en jauge de Lorentz :

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{A}_{//n} + k_n^2 \mathcal{A}_{//n} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{j}_{//n} \quad (1A.4)$$

L'opérateur différentiel $-(d^2/c^2 dt^2) - k_n^2$ n'est autre que l'expression du d'Alembertien $-(d^2/c^2 dt^2) + \Delta$ dans l'espace réciproque. En combinant cette équation avec l'équation (1.45), nous obtenons finalement l'équation suivante pour l'évolution du potentiel vecteur

en jauge de Lorentz :

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{A}_n + k_n^2 \mathcal{A}_n = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{j}_n \quad (1A.5a)$$

On voit ainsi que $U(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ obéissent aux équations de propagation :

$$\Delta U(\mathbf{r}, t) - \frac{d^2 U(\mathbf{r}, t)}{c^2 dt^2} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t) \quad (1A.5b)$$

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{d^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{c^2 dt^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (1A.5c)$$

On peut d'autre part vérifier que :

$$\mathcal{U}_n = \frac{c^2}{\varepsilon_0} \int_0^\infty d\tau \frac{\sin \omega_n \tau}{\omega_n} \rho_n(t - \tau) \quad (1A.6)$$

et

$$\mathcal{A}_n = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^\infty d\tau \frac{\sin \omega_n \tau}{\omega_n} \mathbf{j}_n(t - \tau) \quad (1A.7)$$

sont solutions des équations (1A.3) et (1A.5). Pour revenir dans l'espace réel, nous utilisons les relations de transformation de Fourier (1.9) ce qui donne :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^3 \varepsilon_0} \sum_n e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}} \int_0^\infty d\tau \frac{\sin \omega_n \tau}{\omega_n} \iiint_{(V)} d^3 r' \mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \tau) \mathbf{e}^{-i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}'} \quad (1A.8)$$

En passant à la limite continue lorsque $L \rightarrow +\infty$, puis en intégrant sur les angles polaires et sur le module de \mathbf{k}_n , nous trouvons pour $\tau > 0$:

$$\frac{1}{L^3} \sum_n e^{i\mathbf{k}_n \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \frac{\sin \omega_n \tau}{\omega_n} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi c^2} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(\tau - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right). \quad (1A.9)$$

Il en résulte que les potentiels $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ et $U(\mathbf{r}, t)$ en jauge de Lorentz s'écrivent respectivement dans l'espace réel :

$$\Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \int d^3 r' \int_0^\infty d\tau \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \tau)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(\tau - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right), \quad (1A.10)$$

$$\Rightarrow U(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int d^3 r' \int_0^\infty d\tau \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \tau)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(\tau - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right). \quad (1A.11)$$

Nous retrouvons ainsi les potentiels retardés qui sont très utiles pour trouver les champs rayonnés par un ensemble de charges (voir complément 1B).

Rappelons pour finir que si $\mathbf{A}_{//}$ et U dépendent du choix de jauge (U est donné par (1.50) en jauge de Coulomb et par (1A.11) en jauge de Lorentz), \mathbf{A}_\perp est indépendant de jauge et est donc toujours égal à :

$$\Rightarrow \mathbf{A}_\perp(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \int d^3 r' \int_0^\infty d\tau \frac{\mathbf{j}_\perp(\mathbf{r}', t - \tau)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(\tau - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right). \quad (1A.12)$$

Cette expression peut évidemment être obtenue dans n'importe quelle jauge, mais il s'avère que c'est dans la jauge de Lorentz qu'elle apparaît le plus naturellement.

Complément 1B

Modèle de l'électron élastiquement lié

Nous nous proposons dans ce complément de calculer, dans le cadre de l'électrodynamique classique, le champ électromagnétique rayonné par une charge mobile rappelée vers une position d'équilibre par une force proportionnelle à la distance. Dans le cas où la charge n'est soumise à aucune autre force (oscillations libres), nous verrons que son *mouvement d'oscillation est amorti*, puisque l'énergie émise sous forme de rayonnement électromagnétique est prélevée sur l'énergie mécanique. Dans le cas où la charge est soumise aussi à l'action d'un champ électromagnétique extérieur oscillant à une fréquence ω , nous calculerons les caractéristiques du champ qu'elle rayonne dans tout l'espace en régime d'oscillations forcées. Le problème traité est alors celui de la *diffusion d'une onde électromagnétique*. On distinguera les régimes de diffusion Rayleigh, Thomson, ou résonnante, selon que la pulsation ω du rayonnement incident est inférieure, supérieure, ou voisine de la pulsation propre ω_0 du mouvement de la charge élastiquement liée.

Le problème abordé ici est entièrement classique, et constitue donc une sorte d'étape 0 dans l'étude de l'interaction matière-rayonnement, l'étape 1 étant le traitement semi-classique (présenté dans le chapitre II du cours sur les « Optique Quantique 1 ») et l'étape 2 le traitement complètement quantique présenté au chapitre III. Ce traitement semble a priori peu adapté pour décrire le cas où la charge mobile est un électron à l'intérieur d'un atome, système lié microscopique dans lequel l'aspect quantique est déterminant. Nous montrerons cependant dans ce complément que si l'on prend comme fréquence propre de l'électron élastiquement lié la fréquence de Bohr atomique $\omega_0 = (E_b - E_a)/\hbar$, les résultats du modèle de l'électron élastiquement lié sont en accord avec les résultats quantiques que l'on obtient pour le système à deux niveaux $|a\rangle$ et $|b\rangle$, dans le cas où le champ électromagnétique perturbe faiblement l'état de l'atome (régime linéaire sans effets de saturation).

1B.1 Notations et hypothèses simplificatrices

Considérons un électron de charge q ($q = -1,6 \times 10^{-19}\text{C}$) oscillant autour du point O à la pulsation ω . On décrira le mouvement de l'électron de position \mathbf{r}_e par l'amplitude complexe \mathcal{S} :

$$\mathbf{r}_e = \text{Re} \{ \mathcal{S} \} \quad (1B.1a)$$

$$\mathcal{S} = \mathbf{s}_0 e^{-i\omega t} \quad (1B.1b)$$

Cette notation permet de traiter aussi bien le cas d'un mouvement linéaire que celui d'un mouvement circulaire ou elliptique. Par exemple, un électron oscillant linéairement le long de Oz correspond à $\mathbf{s}_0 = a\mathbf{e}_z$, et un électron ayant une trajectoire circulaire dans le plan xOy correspond à $\mathbf{s}_0 = a(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)/\sqrt{2}$ (a est un nombre complexe quelconque, et $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ et \mathbf{e}_z sont les vecteurs unitaires des axes Ox, Oy et Oz).

On notera \mathcal{D} la quantité

$$\mathcal{D} = q\mathbf{s}_0 e^{-i\omega t} = \mathcal{D}_0 e^{-i\omega t} \quad (1B.1c)$$

qui a les dimensions d'un dipôle électrique, et qui peut être interprétée comme telle dans le cas où l'électron considéré fait partie d'un ensemble neutre, dont le barycentre de toutes les charges autres que l'électron se trouve en O . Rappelons que le dipôle réel est

$$\mathbf{D}(t) = \text{Re} \{ \mathcal{D}_0 e^{-i\omega t} \} \quad (1B.1d)$$

Pour calculer le rayonnement de ce dipôle, nous nous placerons dans le cadre d'hypothèses simplificatrices :

(i) *approximation dipolaire électrique* : on se limite au cas où les charges restent localisées dans un volume nettement plus petit que la longueur d'onde λ du rayonnement émis :

$$|\mathbf{s}_0| \ll \lambda \quad (1B.2)$$

Notons que cette hypothèse implique que la vitesse de l'électron, qui est de l'ordre de $\omega|\mathbf{s}_0|$, reste petite devant la vitesse de la lumière c .

(ii) *champ à grande distance* : on se contentera de calculer les champs rayonnés à des distances grandes devant la longueur d'onde :

$$|\mathbf{r}| \gg \lambda \quad (1B.3)$$

Dans le cas général, le champ rayonné se met sous la forme d'un développement en puissances de λ/r ; l'approximation faite ici consiste à ne garder que le premier terme.

Si le mouvement de l'électron n'est pas purement sinusoïdal, les deux hypothèses que nous venons d'énoncer devront être vérifiées pour toutes les composantes de Fourier de $\mathbf{D}(t)$.

1B.2 Rayonnement dipolaire électrique

a. Potentiels retardés

La formulation de l'électromagnétisme la mieux adaptée à ce problème (c'est-à-dire celle qui permet de faire intervenir le plus rapidement les hypothèses simplificatrices) est celle des potentiels retardés en jauge de Lorentz (Chapitre 1, § ??). Nous utiliserons donc l'expression (1.??) du potentiel vecteur retardé :

$$\mathbf{A}_L(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1B.4)$$

Pour calculer le rayonnement du dipôle, nous ferons la simplification

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx |\mathbf{r}| = r \quad (1B.5)$$

en vertu des hypothèses (i) et (ii) ci-dessus.

Il nous reste à déterminer l'expression de la densité de courant associée à l'électron en mouvement. En toute rigueur, on a :

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}', t) = q\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_e(t))\dot{\mathbf{r}}_e(t) \quad (1B.6a)$$

puisque l'on a une charge ponctuelle de vitesse $\dot{\mathbf{r}}_e$ située au point \mathbf{r}_e . Utilisant à nouveau les hypothèses (i) et (ii), nous prendrons un courant localisé en O, c'est-à-dire :

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \cong q\delta(\mathbf{r}')\dot{\mathbf{r}}_e(t) \quad (1B.6b)$$

En reportant cette expression dans (1B.4), nous trouvons l'expression suivante du potentiel vecteur retardé :

$$\Rightarrow \mathbf{A}_L(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\dot{\mathbf{D}}(t - r/c)}{r} \quad (1B.7)$$

La condition de Lorentz (Eq. 1.??) nous permet d'obtenir le potentiel scalaire associé, $U_L(\mathbf{r}, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_L(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= -c^2 \nabla \cdot \mathbf{A}_L(r, t) \\ &= \frac{r}{4\pi\epsilon_0 cr^3} \cdot [c\dot{\mathbf{D}}(t - r/c) + r\ddot{\mathbf{D}}(t - r/c)] \end{aligned} \quad (1B.8)$$

(Pour obtenir ce résultat, on a utilisé

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad ; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad ; \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \quad (1B.9)$$

formules très utiles dans tout ce calcul). En intégrant par rapport au temps et en ignorant le terme électrostatique qui ne joue aucun rôle dans la suite, on obtient

$$\Rightarrow U_L(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{\mathbf{D}(t - r/c)}{r^3} + \frac{\dot{\mathbf{D}}(t - r/c)}{cr^2} \right] \quad (1B.10)$$

expression dans laquelle le dernier terme est prédominant, compte tenu de l'hypothèse (ii).

Remarque

Le passage de (1B.6a) à (1B.6b) n'est valable que parce que la vitesse de l'électron reste petite devant celle de la lumière, compte tenu de l'hypothèse (ii). Dans le cas relativiste, le champ d'une charge en mouvement serait donné par les potentiels de Lienard et Wiechert (voir par exemple Feynman, Leighton, Sands, Lectures in Physics, Vol. 2, Chapitre 21, § 21.5).

b. Champ rayonné à grande distance par une charge accélérée

Le champ magnétique s'obtient aisément en prenant le rotationnel de \mathbf{A}_L (Equation (1B.7)), et en utilisant les résultats intermédiaires

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (1B.11a)$$

$$\nabla \times \dot{\mathbf{D}}(t - r/c) = -\frac{1}{rc} \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{D}}(t - r/c) \quad (1B.11b)$$

On trouve

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{-\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 c^2} \times \left[\frac{\dot{\mathbf{D}}(t - r/c)}{r^3} + \frac{\ddot{\mathbf{D}}(t - r/c)}{cr^2} \right] \quad (1B.12a)$$

expression dont on ne gardera que le dernier terme, en vertu de l'hypothèse (ii) :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\ddot{\mathbf{D}}(t - r/c)}{r^2} \times \mathbf{r} \quad (1B.12b)$$

Le champ électrique s'obtient à partir de

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}_L}{\partial t} - \nabla U_L \quad (1B.13)$$

Le calcul général est fastidieux. A grande distance, on se limite aux termes de degré le plus bas en $1/r$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[-\frac{\ddot{\mathbf{D}}(t - r/c)}{r} + \frac{\mathbf{r}[r \cdot \ddot{\mathbf{D}}(t - r/c)]}{r^3} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3} \times [\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{D}}(t - r/c)] \end{aligned} \quad (1B.14)$$

En comparant cette expression du champ électrique avec l'équation (1B.12b), on voit que :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{r}}{rc} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (1B.15)$$

Les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} sont donc tous deux orthogonaux à \mathbf{r} . Ils sont de surcroît en phase. On constate par ailleurs que le champ électromagnétique rayonné à grande distance est proportionnel à $\ddot{\mathbf{D}}$, c'est-à-dire à l'accélération de la charge qui rayonne, mais avec un retard r/c correspondant au temps de propagation. Dans une direction \mathbf{r}/r donnée, le champ

électromagnétique ou magnétique décroît en $1/r$, et non pas en $1/r^2$ ou en $1/r^3$ comme en électrostatique et en magnétostatique. Il s'agit d'une onde sphérique, non uniforme, qui se propage à partir de l'origine. Le champ électromagnétique au point M a donc localement la même structure qu'une onde plane progressive se propageant suivant \mathbf{r} .

Le vecteur de Poynting $\mathbf{\Pi}$ au point M s'écrit

$$\Rightarrow \quad \mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \frac{\mathbf{r}[\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{D}}(t - r/c)]^2}{r^5} \quad (1B.16)$$

La puissance rayonnée décroît suivant une loi en $1/r^2$. Dans une direction donnée, elle est proportionnelle au carré de l'accélération de la charge.

c. Dipôle oscillant sinusoïdalement. Polarisation π, σ_+, σ_-

Revenons maintenant au cas d'un dipôle oscillant sinusoïdalement (Équation 1B.1b). En notation complexe, le champ électromagnétique rayonné, de pulsation ω s'obtient à partir de (1B.12b) et (1B.14) :

$$\Rightarrow \quad \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\omega^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathcal{D}_0)}{r^3} e^{-i\omega(t-r/c)} \quad (1B.17a)$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\omega^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3} \frac{(\mathbf{r} \times \mathcal{D}_0)}{r^2} e^{-i\omega(t-r/c)} \quad (1B.17b)$$

et le vecteur de Poynting *moyenné sur une période optique* vaut donc

$$\Rightarrow \quad \overline{\mathbf{\Pi}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\omega^4}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \frac{|\mathbf{r} \times \mathcal{D}_0|^2}{r^5} \mathbf{r} \quad (1B.18)$$

Nous allons maintenant étudier successivement deux cas particuliers importants : tout d'abord celui d'un dipôle oscillant suivant Oz (cas appelé π), puis celui d'un dipôle polarisé circulairement dont l'extrémité décrit, à la vitesse angulaire ω , un cercle dans le plan xOy (cas appelé σ_+ ou σ_- suivant le sens de rotation).

(i) Dans le cas de la polarisation π , on a

$$\mathcal{D}_0 = d_0 \mathbf{e}_z \quad (1B.19a)$$

En introduisant les coordonnées sphériques (r, θ, φ) et en posant $k = \omega/c$, on obtient (voir figure 1B.1) :

$$\mathcal{E}_\pi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\omega^2 d_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{\sin \theta}{r} e^{-i(\omega t - kr)} \mathbf{e}_\theta \quad (1B.19b)$$

$$\mathcal{B}_\pi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\omega^2 d_0}{4\pi\varepsilon_0 c^3} \frac{\sin \theta}{r} e^{-i(\omega t - kr)} \mathbf{e}_\varphi \quad (1B.19c)$$

$$\overline{\mathbf{\Pi}} = \frac{\omega^4 d_0^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (1B.19d)$$

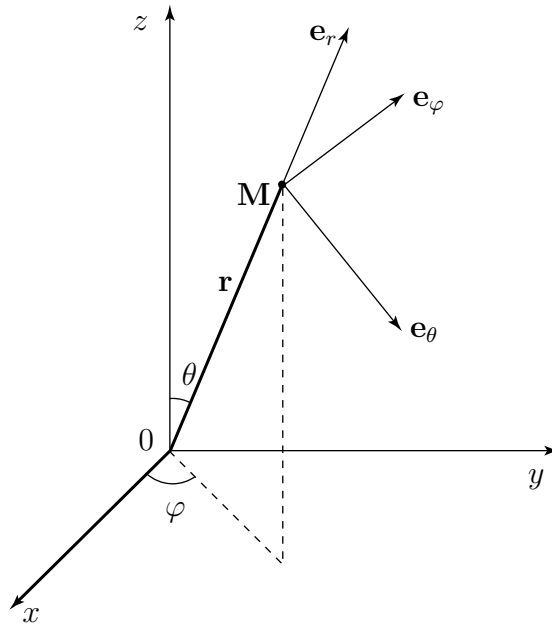


FIG. 1B.1 : Coordonnées sphériques.

Un dipôle linéaire émet donc préférentiellement dans un plan perpendiculaire à son axe de vibration ($\theta = \pi/2$). Le champ électrique est polarisé linéairement dans le plan contenant le dipôle et la direction de propagation (figure 1B.2). La puissance totale Φ rayonnée à travers une surface fermée entourant le dipôle s'obtient en intégrant (1B.19d). On trouve un résultat indépendant de r :

$$\Rightarrow \quad \Phi = \frac{\omega^4 d_0^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} \quad (1B.20)$$

Remarque

On va montrer qu'il est possible de retrouver la formule (1B.20) donnant la puissance totale rayonnée directement à l'aide des variables normales en utilisant la formule (1.??) donnant l'énergie du champ libre.

On suppose que le dipôle oscille entre les instants 0 et T (avec $T \gg 2\pi/\omega$). La solution de l'équation (??) à l'instant T est :

$$\alpha_\ell = e^{-i\omega_\ell T} \int_0^T d\tau \frac{i}{2\epsilon_0 C_\ell} e^{i\omega_\ell \tau} j_\ell(\tau)$$

où la composante j_ℓ de la densité de courant est donnée par l'équation (??). Pour un dipôle localisé en $\mathbf{r} = 0$, nous avons d'après (1B.6b)

$$j_\ell(\tau) = q \dot{\mathbf{r}}_e(\tau) \cdot \vec{\epsilon}_\ell$$

En particulier pour un dipôle linéaire, nous avons en utilisant la notation (1B.19a)

$$j_\ell(\tau) = -i\omega \frac{d_0}{2} (\mathbf{e}_z \cdot \epsilon_\ell) e^{-i\omega\tau} + c.c.$$

d'où, en négligeant dans l'intégrale donnant α_ℓ le terme oscillant en $(\omega_\ell + \omega)t$ puisqu'il donne une contribution $|\omega_\ell - \omega|/|\omega_\ell + \omega|$ plus petite que le terme oscillant en $(\omega_\ell - \omega)t$:

$$\alpha_\ell = \frac{d_0 \omega}{4\varepsilon_0 C_\ell} (\mathbf{e}_z \cdot \vec{\varepsilon}_\ell) \frac{\sin(\frac{\omega_\ell - \omega}{2} T)}{\frac{\omega_\ell - \omega}{2}} e^{-i\frac{\omega - \omega_\ell}{2} T}$$

L'énergie du rayonnement est donnée par la formule (1.??). En utilisant l'expression précédente de α_ℓ , il vient

$$H = \sum_\ell \frac{d_0^2 \omega^2}{8\varepsilon_0 L^3} (\mathbf{e}_z \cdot \vec{\varepsilon}_\ell)^2 \frac{\sin^2(\frac{\omega_\ell - \omega}{2} T)}{(\frac{\omega_\ell - \omega}{2})^2}$$

On remarquera que la constante de normalisation C_ℓ disparaît (comme il se doit) du résultat physique. La somme sur ℓ est remplacée par l'intégrale (1.1.11)

$$H = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k_\ell \frac{d_0^2 \omega^2}{8\varepsilon_0} \sum_{\vec{\varepsilon}_\ell} (\mathbf{e}_z \cdot \vec{\varepsilon}_\ell)^2 \frac{\sin^2(\frac{\omega_\ell - \omega}{2} T)}{(\frac{\omega_\ell - \omega}{2})^2}$$

La somme $\sum_{\vec{\varepsilon}_\ell}$ porte sur deux polarisations orthogonales au vecteur d'onde \mathbf{k}_ℓ . On prendra une polarisation (\mathbf{e}_θ) dans le plan $\mathbf{k}_\ell, \mathbf{e}_z$ et l'autre (\mathbf{e}_φ) dans le plan orthogonal. En utilisant les notations de la figure 1B.1, on trouve ainsi

$$\sum_\ell (\mathbf{e}_z \cdot \vec{\varepsilon}_\ell)^2 = (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\theta)^2 = \sin^2 \theta$$

et

$$H = \frac{d_0^2 \omega^2}{64\pi^3 \varepsilon_0} \int dk_\ell k_\ell^2 \frac{\sin^2(\frac{\omega_\ell - \omega}{2} T)}{(\frac{\omega_\ell - \omega}{2})^2} \int d\Omega \sin^2 \theta$$

On peut simplifier cette expression à l'aide de la fonction de Dirac δ_T introduite dans le cours « Optique Quantique 1 » (formule 1.??)

$$\frac{\sin^2(\frac{\omega_\ell - \omega}{2} T)}{(\frac{\omega_\ell - \omega}{2})^2} = 2\pi T \delta_T(\omega_\ell - \omega)$$

En utilisant en outre l'intégrale $\int d\Omega \sin^2 \theta = \frac{8\pi}{3}$, nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{H}{T} &= \frac{d_0^2 \omega^2}{12\pi \varepsilon_0} \frac{1}{c^3} \int d\omega_\ell \omega_\ell^2 \delta_T(\omega_\ell - \omega) \\ &= \frac{d_0^2 \omega^4}{12\pi \varepsilon_0 c^3} \end{aligned}$$

On retrouve ainsi la formule (1B.20) donnant l'énergie rayonnée par unité de temps dans tout l'espace.

(ii) Considérons maintenant le cas d'un dipôle tournant dans le sens direct (cas σ_+)

$$\mathcal{D}_0 = d_0 \vec{\varepsilon}_+ \quad \text{avec} \quad \vec{\varepsilon}_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) \quad (1B.21)$$

La polarisation du rayonnement émis suivant une direction OM quelconque est en général elliptique. Il existe cependant des directions particulières où elle est simple.

Considérons tout d'abord le champ en un point M situé sur l'axe Oz :

$$\mathcal{E}(r\mathbf{e}_z, t) = \frac{\omega^2 d_0}{4\pi \varepsilon_0 c^2 r} \vec{\varepsilon}_+ e^{i(kr - \omega t)} \quad (1B.22)$$

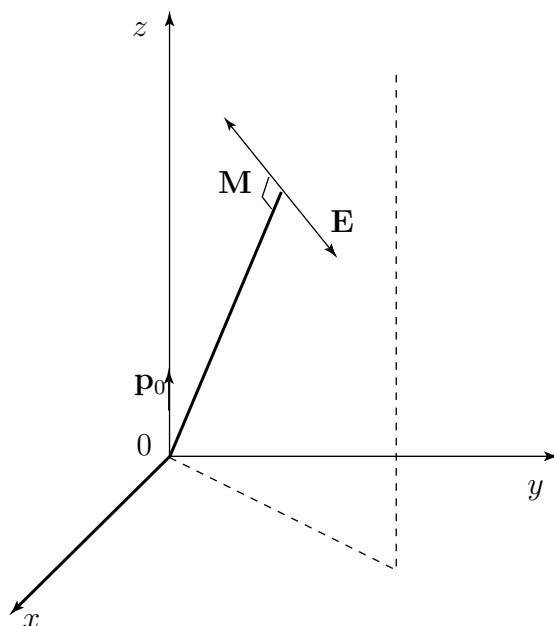


FIG. 1B.2: Rayonnement émis par un dipôle oscillant suivant Oz . Le champ électrique en M est polarisé linéairement perpendiculairement à OM , dans le plan (Oz, OM) . L'émission est nulle suivant Oz , et maximale dans le plan (xOy) .

Le champ électrique est polarisé circulairement dans le même sens que le dipôle ; il en est naturellement de même du champ magnétique \mathbf{B} qui reste perpendiculaire à \mathbf{E} à tout instant. C'est ce qui caractérise un champ polarisé circulairement dans le sens positif.

Considérons maintenant, toujours pour le dipôle σ_+ , le champ en un point M situé dans le plan xOy , dans une direction \mathbf{e}_r caractérisée par l'angle φ . Alors

$$\mathbf{e}_r \times (\mathbf{e}_r \times \mathcal{D}_0) = -\frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} d_0 \mathbf{e}_\varphi \quad (1B.23a)$$

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} \frac{\omega^2 d_0}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r} e^{i(kr - \omega t)} \mathbf{e}_\varphi \quad (1B.23b)$$

Le champ électrique est polarisé linéairement suivant le vecteur \mathbf{e}_φ , perpendiculaire à la fois à la direction de propagation OM et à l'axe de rotation du dipôle, et il oscille dans le plan xOy . Ceci est assez intuitif, le dipôle tournant étant vu « par la tranche ». En un point M qui n'est ni sur l'axe Oz , ni dans le plan xOy , le rayonnement émis est polarisé elliptiquement, et le diagramme de rayonnement a une symétrie cylindrique.

Bien que ce diagramme de rayonnement soit différent de celui du dipôle linéaire, la puissance totale émise dans tout l'espace est la même (Eq. 1B.20). Ceci peut se démontrer en intégrant l'équation (1B.18) sur toutes les directions d'émission. Plus simplement, on peut remarquer que les champs émis par les composantes du dipôle suivant Ox et Oy sont en tout point en quadrature : les puissances moyennes rayonnées par chacune d'elles s'ajoutent sans terme croisé.

Le cas d'un dipôle tournant dans le sens rétrograde (cas σ_-), caractérisé par :

$$\mathbf{D}_0 = d_0 \vec{\epsilon}_- \quad \text{avec} \quad \vec{\epsilon}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y) \quad (1B.24)$$

conduit de même à un rayonnement polarisé circulairement σ_- pour une émission dans la direction Oz , et à un rayonnement polarisé linéairement pour une émission dans le plan xOy .

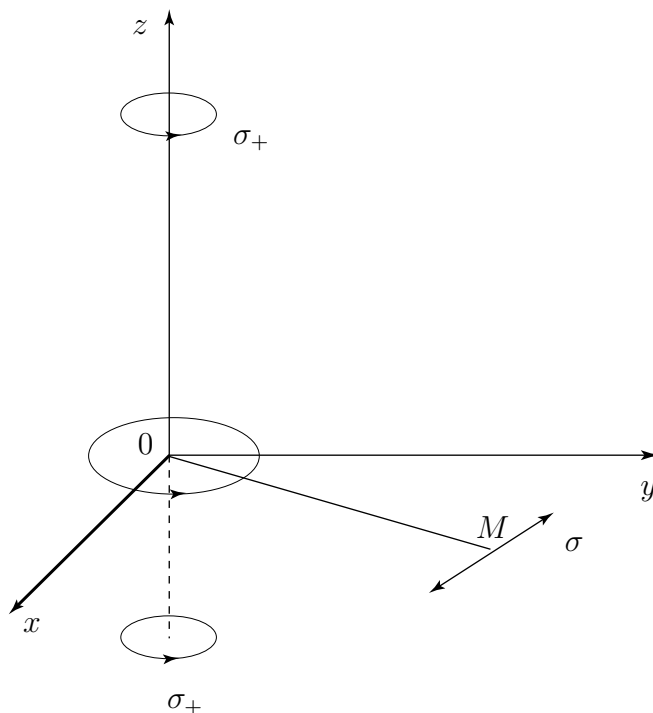


FIG. 1B.3: Emission dipolaire σ_+ . Pour un dipôle tournant en O , la lumière émise suivant Oz est polarisée circulairement ; elle est polarisée linéairement pour une émission dans le plan xOy du dipôle tournant, et elliptiquement dans une direction quelconque. Notons que le sens de rotation σ_+ est défini par rapport à l'axe Oz , et non par rapport à la direction de propagation.

d. Cas de l'atome quantifié

Considérons un atome (ou d'une assemblée d'atomes) émettant de la lumière sous l'effet d'un champ incident en passant d'un niveau $|b\rangle$ à un niveau $|a\rangle$, séparés par l'écart en énergie $E_b - E_a = \hbar\omega_0$. Le champ rayonné par ce système s'obtient en faisant un calcul quantique, analogue à celui du chapitre II du cours sur les « Optique Quantique 1 », de la valeur moyenne du dipôle atomique $\mathbf{D}(t) = \langle \psi(t) | \hat{\mathbf{D}} | \psi(t) \rangle$, et en portant cette valeur dans les formules (1B.17) et (1B.18). On obtient les mêmes diagrammes de rayonnement que ceux décrits dans ce complément : plus précisément, si la transition a lieu entre niveaux ayant le même nombre quantique magnétique suivant Oz (transition $\Delta m = 0$ selon Oz), on a un diagramme de rayonnement du type π (voir Cours « Optique Quantique 1 » Complément II.1) ; si la transition fait varier m d'une unité ($\Delta m = \pm 1$), on a un diagramme de rayonnement de type σ_+ ou σ_- relativement à Oz . Notons enfin que l'élément

de matrice dipolaire électrique est nul si $|\Delta m| > 1$ (règles de sélection des transitions dipolaires électriques, voir cours « Optique Quantique 1 » Complément II.1), et qu'il n'y a alors pas de rayonnement dipolaire électrique émis dans ce cas.

1B.3 Réaction de rayonnement. Amortissement radiatif d'un électron élastiquement lié

a. Réaction de rayonnement

Par suite de la conservation de l'énergie, l'énergie électromagnétique rayonnée par l'électron doit être prélevée sur son énergie mécanique. Il doit donc exister une interaction entre l'électron et le champ qu'il émet en son propre emplacement. On peut effectivement montrer qu'il existe une force de ce type¹, appelée réaction de rayonnement. Cette force comporte un terme² proportionnel à $\ddot{\mathbf{r}}$, que l'on peut interpréter comme une correction de la masse de l'électron, et un terme proportionnel $\dot{\mathbf{r}}$, qui s'écrit :

$$\mathbf{F}_{RR} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{r}} = \frac{2mr_0}{3c} \ddot{\mathbf{r}} \quad (1B.25a)$$

On a introduit la quantité r_0 , homogène à une longueur, et appelée « rayon classique de l'électron » :

$$r_0 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \approx 2,8 \times 10^{-15} \text{ m} \quad (1B.25b)$$

Nous ne chercherons pas à établir l'expression (1B.25a), mais nous allons par contre vérifier qu'elle est compatible avec les résultats établis au § 2. Calculons pour cela la puissance moyenne fournie par cette force à un électron oscillant sinusoidalement avec une amplitude a :

$$\frac{dW}{dt} = \overline{\mathbf{F}_{RR} \cdot \dot{\mathbf{r}}} = -\frac{q^2 \omega^4 a^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} \quad (1B.26)$$

On trouve une puissance reçue par l'électron négative, exactement opposée à la puissance moyenne rayonnée par l'électron (Eq. (1B.20)), ce qui assure que le choix de \mathbf{F}_{RR} présenté en (1B.25a) est cohérent avec la conservation de l'énergie : l'énergie emportée sous forme de rayonnement électromagnétique est prélevée à l'énergie mécanique de l'électron qui est freiné. Cette force de freinage \mathbf{F}_{RR} n'est autre que la contrepartie, du point de vue du mouvement de l'électron, de son rayonnement.

¹Voir CDG 1 p. 70, ou J.D. Jackson « Classical Electrodynamics », chapitre 17 (Wiley 1975).

²Comme dans ce paragraphe on ne s'intéresse qu'au mouvement de l'électron, on notera pour simplifier \mathbf{r} et non \mathbf{r}_e la position de l'électron.

b. Amortissement radiatif d'un électron élastiquement lié

Pour évaluer l'effet de ce freinage, revenons à notre modèle d'électron élastiquement lié, rappelé vers l'origine par une force $-m\omega_0^2\mathbf{r}$. Il obéit à l'équation du mouvement

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\omega_0^2\mathbf{r} - \frac{2}{3}\frac{mr_0}{c}(\ddot{\mathbf{r}}) = 0 \quad (1B.27)$$

Cherchons une solution s'écrivant (en notation complexe) $\mathbf{s}_0 e^{-i\Omega t}$. La pulsation Ω est alors donnée par :

$$\Omega^2 = \omega_0^2 - i\frac{2}{3}\frac{r_0}{c}\Omega^3 \quad (1B.28)$$

On se limite à des fréquences Ω telles que $\Omega \ll c/r_0 \approx 10^{23} \text{ s}^{-1}$. Dans ce cas³, Ω est proche de ω_0 et on peut chercher les solutions de (1B.28) sous forme d'un développement perturbatif

$$\Omega = \omega_0 + \Delta\Omega^{(1)} + \Delta\Omega^{(2)} + \dots \quad (1B.29a)$$

Le terme du premier ordre est alors

$$2\omega_0 \Delta\Omega^{(1)} = -i\frac{2}{3}\frac{r_0}{c}\omega_0^3 \quad (1B.29b)$$

On obtient ainsi la solution au premier ordre en r_0/c que l'on écrit sous la forme

$$\Delta\Omega^{(1)} = -i\frac{\Gamma_{cl}}{2} = -i\frac{r_0}{3c}\omega_0^2 \quad (1B.29c)$$

Le mouvement de l'électron est donc finalement un mouvement oscillant amorti :

$$\mathbf{r} = \mathbf{s}_0 \exp(-\Gamma_{cl}t/2) \cos \omega_0 t \quad (1B.30a)$$

avec :

$$\Gamma_{cl} = \frac{2}{3}\frac{r_0}{c}\omega_0^2 = \frac{4\pi}{3}\frac{r_0}{\lambda_0}\omega_0 \quad (1B.30b)$$

formule dans laquelle nous avons introduit la longueur d'onde $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$. La puissance rayonnée est donc amortie avec la constante de temps Γ_{cl}^{-1} que l'on appelle *durée de vie radiative classique*.

Il est intéressant de calculer la valeur de Γ_{cl}^{-1} pour des fréquences $\omega_0/2\pi$ correspondant à de la lumière visible. Pour le milieu du domaine visible ($5 \times 10^{14} \text{ Hz}$, correspondant à $\lambda_0 = 0,6\mu\text{m}$), on trouve une durée de vie radiative :

$$\Gamma_{cl}^{-1} \approx 16 \text{ ns} \quad (\lambda_0 = 0,6\mu\text{m})$$

³Le domaine d'application de la théorie présentée dans ce complément est en fait limité à des fréquences bien inférieures à c/r_0 . Par exemple, les effets quantiques relativistes imposent une limite $\Omega \ll mc^2/\hbar = \alpha c/r_0$, où $\alpha \approx 1/137$ est la constante de structure fine.

Dans le domaine des rayons X, on trouve des temps beaucoup plus courts, puisque Γ_{cl} varie comme λ_0^{-2} . Notons néanmoins que, même dans ce domaine, le *facteur de qualité* ω_0/Γ_{cl} , qui caractérise le nombre de périodes émises par l'électron avant que son mouvement ne soit notablement amorti, reste grand devant 1.

Le résultat obtenu à partir du modèle classique peut être utilisé dans le cas d'un atome excité dans un état $|b\rangle$ et se désexcitant par émission spontanée vers un état $|a\rangle$, en émettant un rayonnement de pulsation ω_0 . La probabilité de trouver l'atome dans l'état $|b\rangle$ décroît exponentiellement au cours du temps, la durée de vie radiative Γ_{sp}^{-1} caractérisant cette décroissance étant de l'ordre de la valeur donnée par la formule (1B.30b) (voir Chapitre 3 § 3.3.4). Les valeurs calculées ci-dessus donnent donc généralement un bon ordre de grandeur pour les durées de vie radiatives atomiques.

c. Moment cinétique de la lumière polarisée circulairement

Considérons un électron tournant dans le plan xOy dans le sens direct (cas σ_+) à la fréquence ω . Un tel électron perd de l'énergie comme le montre la formule (1B.26) (qui est valable également pour un mouvement circulaire de rayon $a/\sqrt{2}$) mais également du moment cinétique. Calculons la variation de moment cinétique par unité de temps $d\mathbf{L}/dt$. De la relation fondamentale de la dynamique, on déduit

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{RR} \quad (1B.31)$$

Les coordonnées de l'électron à l'instant t sont :

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \omega t \quad (1B.32a)$$

$$y = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin \omega t \quad (1B.32b)$$

et les projections F_x et F_y de \mathbf{F}_{RR} sont d'après (1B.25a) et (1B.32) égales à

$$F_x = \frac{2mr_0}{3c} \frac{a}{\sqrt{2}} \omega^3 \sin \omega t \quad (1B.33a)$$

$$F_y = -\frac{2mr_0}{3c} \frac{a}{\sqrt{2}} \omega^3 \cos \omega t \quad (1B.33b)$$

La variation du moment cinétique par unité de temps est donc

$$\frac{d}{dt} L_z = -\frac{1}{3} \frac{mr_0}{c} a^2 \omega^3 \quad (1B.34)$$

En remplaçant r_0 par sa définition (Eq. (1B.25b)), on trouve

$$\frac{d}{dt} L_z = -\frac{q^2 \omega^3 a^2}{12\pi \epsilon_0 c^3} \quad (1B.35)$$

La comparaison de cette formule et de l'équation (1B.26) montre que les pertes par rayonnement de moment cinétique et d'énergie sont dans un rapport constant :

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{1}{\omega} \frac{dW}{dt} \quad (1B.36a)$$

Lorsque le mouvement de l'électron est totalement amorti, l'énergie W et le moment cinétique L_z du champ rayonné au cours du mouvement sont liés par la relation déduite de (1B.36a) par intégration temporelle :

$$L_z = \frac{W}{\omega} \quad (1B.36b)$$

Cette relation, obtenue par un calcul purement classique, est interprétable dans un cadre quantique : si l'état initial du système est un atome excité unique, l'énergie totale rayonnée W est égale à $\hbar\omega$, et donc *le moment cinétique du photon σ_+ ainsi émis a une composante L_z le long de Oz égale à \hbar .*

Le même raisonnement fait avec une rotation de l'électron dans le sens opposé (σ_-) conduirait à une égalité analogue à (1B.36b), mais avec un signe opposé, et donc à un moment cinétique le long de Oz égal à $-\hbar$ pour un photon σ_- .

1B.4 Diffusion Rayleigh, diffusion Thomson, diffusion résonnante

Le modèle de l'électron élastiquement lié se prête très bien à l'étude de la diffusion d'une onde électromagnétique. Il suffit en effet de déterminer le mouvement forcé de l'électron sous l'effet d'une onde incidente, et d'en déduire le rayonnement diffusé.

Supposons donc que l'on a un rayonnement incident

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \cos \omega t \quad (1B.37a)$$

Si on néglige l'effet du champ magnétique, dont l'effet est en v/c par rapport à l'effet du champ électrique, l'amplitude du mouvement forcé s'obtient en résolvant une équation différentielle dont le membre de gauche coïncide avec celui de l'équation (1B.27) et le membre de droite est $q\mathbf{E}(t)$. On obtient, en notation complexe :

$$\mathbf{s}_0 = \frac{q\mathbf{E}_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma_{cl}\omega^3/\omega_0^2} \quad (1B.37b)$$

d'où une puissance diffusée Φ_d (Equation 1B.20) qui vaut :

$$\Phi_d = \frac{q^4 \mathbf{E}_0^2}{12\pi\epsilon_0 c^3 m^2} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma_{cl}^2 \omega^6 / \omega_0^4} \quad (1B.37c)$$

On rappelle qu'il est possible de définir la section efficace totale de diffusion $\sigma(\omega)$ par le rapport de la puissance totale diffusée au flux incident par unité de surface :

$$\Phi_d = \frac{d\Phi_i}{dS} \sigma(\omega) \quad (1B.38a)$$

formule dans laquelle $\frac{d\Phi_i}{dS}$ est plus précisément la puissance moyenne incidente par unité de surface, c'est-à-dire

$$\frac{d\Phi_i}{dS} = \Pi_i = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \mathbf{E}_0^2 \quad (1B.38b)$$

On en déduit

$$\Rightarrow \quad \sigma(\omega) = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma_{cl}^2 \omega^6 / \omega_0^4} \quad (1B.39)$$

(i) Considérons tout d'abord le régime $\omega \ll \omega_0$ (*diffusion Rayleigh*). La section efficace vaut alors :

$$\Rightarrow \quad \sigma(\omega) \approx \frac{8\pi}{3} r_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \quad (1B.40)$$

Elle croît très rapidement avec la fréquence du rayonnement incident. En particulier, la diffusion de la lumière solaire visible par les molécules de l'atmosphère, dont les transitions électroniques tombent dans l'ultraviolet, correspond à un tel régime. La partie haute fréquence du spectre visible de la lumière solaire est donc la plus diffusée. Le ciel apparaît cependant bleu et non violet à l'œil humain d'une part parce que l'œil est plus sensible dans le bleu que dans le violet, et d'autre part à cause de la décroissance du spectre de la lumière solaire du bleu au violet.

(ii) A l'opposé, le régime de la *diffusion Thomson* est celui des fréquences très supérieures à la fréquence de résonance, $\omega \gg \omega_0$. La formule (1B.39) montre qu'alors la section efficace de diffusion tend vers une constante qui vaut⁴ :

$$\sigma(\omega) \approx \frac{8\pi}{3} r_0^2 \approx 6,5 \times 10^{-29} \text{ m}^2 \quad (1B.41)$$

Ce régime est celui de la diffusion des rayons X par la matière. Cette formule a joué un rôle important dans la détermination, au début du siècle, du nombre d'électrons de certains atomes à partir de mesures d'absorption de rayons X.

(iii) Considérons enfin le cas de fréquences voisines de la fréquence d'oscillation propre de l'électron, $\omega \approx \omega_0$ (*diffusion résonnante*). En ne gardant que les termes d'ordre le plus bas en $\omega - \omega_0$, et en se souvenant que Γ_{cl} est petit devant ω_0 , on a alors :

$$\sigma(\omega) = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \frac{\omega_0^2}{4(\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma_{cl}^2} \quad (1B.42)$$

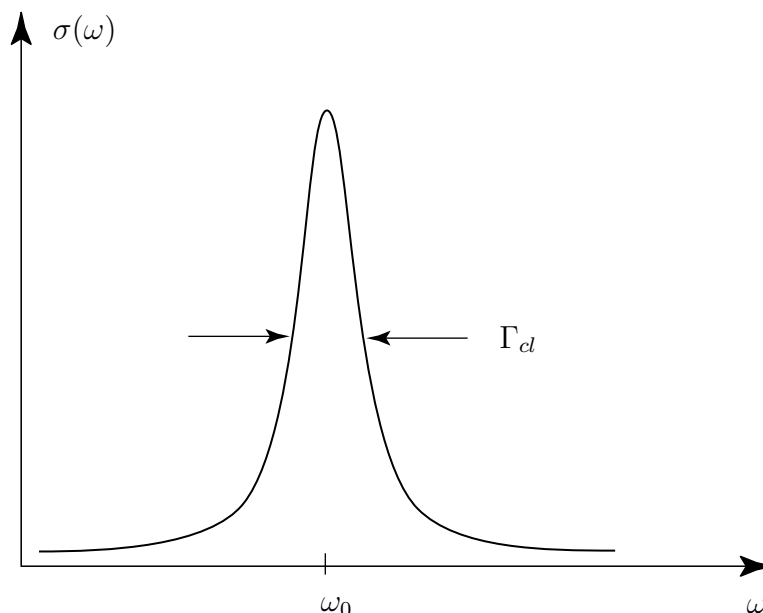


FIG. 1B.4: Section efficace de diffusion résonnante. On a une variation Lorentzienne, de largeur à mi-hauteur Γ_{cl} . Pour de la lumière visible, le facteur de qualité de la résonance ω_0/Γ_{cl} est de l'ordre de 10^8 . Ces résultats restent qualitativement corrects en théorie quantique.

En se servant de (1B.30b), on trouve la forme remarquable :

$$\Rightarrow \quad \sigma(\omega) = \frac{3\lambda_0^2}{2\pi} \frac{\Gamma_{cl}^2/4}{(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma_{cl}^2/4} \quad (1B.43)$$

La section efficace a un comportement résonnant de forme Lorentzienne autour de ω_0 . La figure 1B.4 montre l'allure de la résonance, de largeur à mi-hauteur Γ_{cl} . Notons que la section efficace à résonance, $3\lambda_0^2/2\pi$ a pour ordre de grandeur le carré de la longueur d'onde du rayonnement à résonance. Elle est considérablement plus élevée que la section efficace Thomson (par 18 ordres de grandeur dans le domaine visible!) : il s'agit d'une *résonance exceptionnellement aiguë*.

Nous verrons au chapitre 3 que ces résultats se généralisent au cas quantique : on trouve en particulier que dans les deux cas extrêmes des diffusions Rayleigh et Thomson (Equations (1B.40) et (1B.41)) les expressions des sections efficaces sont pratiquement inchangées. Quant à la section efficace résonnante, elle garde la forme (1B.42) à condition de remplacer Γ_{cl} par la largeur naturelle Γ_{sp} de la transition considérée. Notons que la valeur à résonance $3\lambda_0^2/2\pi$ est exactement la même.

⁴En vertu de l'hypothèse (ii), le modèle est limité à $\Gamma_{cl}\omega/\omega_0^2 \ll 1$, ce qui permet de négliger le second terme du dénominateur ($\omega_0^2/\Gamma_{cl} \approx 10^{23} \text{ s}^{-1}$ dans le domaine optique).

1B.5 Susceptibilité

Nous nous proposons d'établir l'expression de la susceptibilité d'un milieu constitué d'« atomes classiques » comprenant chacun un électron élastiquement lié, avec une densité atomique égale à N/V . D'après (1B.37b), la polarisation du milieu est égale à :

$$\mathbf{P}(t) = \text{Re} \left\{ \frac{N}{V} \frac{q^2 \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma_{cl}\omega^3/\omega_0^2} \right\} \quad (1B.44)$$

En utilisant la définition (2.2.107) du cours « Optique Quantique 1 » de la susceptibilité en notation complexe, nous trouvons donc :

$$\chi = \frac{N}{V} \frac{q^2}{m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma_{cl}\omega^3/\omega_0^2} \quad (1B.45)$$

soit, pour les parties réelle et imaginaire de la susceptibilité :

$$\chi' = \frac{N}{V} \frac{q^2}{m\varepsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\Gamma_{cl}\omega^3/\omega_0^2)^2} \quad (1B.46)$$

$$\chi'' = \frac{N}{V} \frac{q^2}{m\varepsilon_0} \frac{\Gamma_{cl}\omega^3/\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\Gamma_{cl}\omega^3/\omega_0^2)^2} \quad (1B.47)$$

Au voisinage de la résonance, c'est-à-dire lorsque $\Gamma_{cl} \ll |\omega - \omega_0| \ll \omega_0$, la partie réelle de la susceptibilité prend la forme simple :

$$\chi' = \frac{N}{V} \frac{q^2}{2m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0(\omega_0 - \omega)} = \frac{\chi'_Q}{f_{ab}} \quad (1B.48a)$$

où χ'_Q désigne la partie réelle de la susceptibilité linéaire obtenue dans le cadre de la théorie quantique à faible intensité et l'approximation résonnante (Equation II.D.22b du cours « Optique Quantique 1 »). Le facteur sans dimension f_{ab} est appelé *force d'oscillateur* de la transition. Il vaut :

$$f_{ab} = \frac{2m\omega_0 z_{ab}^2}{\hbar} \quad (1B.48b)$$

Par ailleurs, en utilisant (1B.25b) et (1B.30b), on peut transformer l'expression donnant la partie imaginaire de la susceptibilité pour trouver :

$$\chi'' = \frac{N}{V} \sigma(\omega) \frac{c}{\omega} \quad (1B.49)$$

où la section efficace $\sigma(\omega)$ est donnée par l'expression (1B.39). L'équation (1B.49) montre la relation étroite existant entre le coefficient d'absorption de l'onde incidente (proportionnel à χ'') et la section efficace de diffusion $\sigma(\omega)$. On retrouve ainsi dans ce cas particulier un résultat très général⁵, connu sous le nom de *théorème optique*.

⁵Voir par exemple J. Jackson *Classical Electrodynamics* § 9.14, Wiley (New York 1975), ou A. Messiah, *Mécanique Quantique* § XIX-31, Dunod (Paris 1964).

1B.6 Lien entre le modèle classique de l'électron élastiquement lié et le modèle quantique de l'atome à deux niveaux

Nous allons montrer que les résultats que nous venons d'obtenir dans le cadre du modèle de l'électron classique élastiquement lié, de fréquence caractéristique ω_0 , se transposent au cas d'un atome (ou d'une assemblée d'atomes), à l'approximation du *système à deux niveaux* $|a\rangle$ et $|b\rangle$, séparés par l'écart en énergie

$$E_b - E_a = \hbar\omega_0, \quad (1B.50)$$

à condition que le système reste peu excité (loin de la saturation).

Utilisons pour cela l'approche semi-classique développée dans le cours Optique Quantique 1, à l'approximation dipolaire électrique. L'hamiltonien du système vaut alors :

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - q\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}_0 \cos \omega t \quad (1B.51)$$

où \hat{H}_0 est l'hamiltonien de l'atome. La restriction de cet hamiltonien à l'espace sous-tendu par les deux niveaux $|a\rangle$ et $|b\rangle$ (où $|a\rangle$ est le niveau fondamental pris comme zéro d'énergie) s'écrit alors, si \mathbf{E}_0 est pris parallèle à Oz :

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - qz_{ab}E_0 \cos \omega t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1B.52)$$

avec $z_{ab} = \langle a|\hat{z}|b\rangle$, supposé réel. Récrivons \hat{H} en fonction de la matrice identité \hat{I} et des matrices de Pauli⁶ $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$ et $\hat{\sigma}_z$:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\sigma}_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\sigma}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (1B.53)$$

On obtient :

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega_0}{2}(\hat{I} - \hat{\sigma}_z) - qz_{ab}\hat{\sigma}_xE_0 \cos \omega t. \quad (1B.54)$$

Rappelons les relations de commutation des matrices de Pauli, qui s'obtiennent par permutation circulaire à partir de :

$$[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y] = 2i\hat{\sigma}_z. \quad (1B.55)$$

Pour comparer avec le cas classique, il nous faut déterminer l'équation qui régit l'évolution de la *valeur moyenne de la position* $\hat{\mathbf{r}}$ de l'électron atomique, et plus précisément, de la coordonnée \hat{z} . Nous allons pour cela utiliser le théorème d'Ehrenfest :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle \hat{z} \rangle &= \frac{1}{i\hbar}\langle [\hat{z}, \hat{H}] \rangle = \frac{z_{ab}}{i\hbar}\langle [\hat{\sigma}_x, \hat{H}] \rangle \\ &= \frac{z_{ab}\omega_0}{2i}\langle [\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_z] \rangle = \omega_0 z_{ab}\langle \hat{\sigma}_y \rangle. \end{aligned} \quad (1B.56)$$

⁶Voir par exemple JLB Chapitre VI.1.

On en déduit la dérivée seconde de $\langle \hat{z} \rangle$ par rapport au temps :

$$m \frac{d^2}{dt^2} \langle \hat{z} \rangle = m \omega_0 z_{ab} \frac{d}{dt} \langle \hat{\sigma}_y \rangle = \frac{m \omega_0 z_{ab}}{i \hbar} \langle [\hat{\sigma}_y, \hat{H}] \rangle. \quad (1B.57)$$

Compte tenu de l'expression (1B.54) de \hat{H} , le commutateur présente deux termes non nuls :

$$\begin{aligned} m \frac{d^2}{dt^2} \langle \hat{z} \rangle &= \frac{m \omega_0 z_{ab}}{i \hbar} \left(-\frac{\hbar \omega_0}{2} \langle [\hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z] \rangle - q E_0 z_{ab} \cos \omega t \langle [\hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_x] \rangle \right) \\ &= m \omega_0^2 z_{ab} \langle \hat{\sigma}_x \rangle + \frac{2 m \Omega_0 z_{ab}^2}{\hbar} q E_0 \cos \omega t \langle \hat{\sigma}_z \rangle \end{aligned} \quad (1B.58)$$

Cette équation s'exprime finalement en fonction de la *force d'oscillateur* f_{ab} de la transition $|a\rangle \rightarrow |b\rangle$, donnée par l'expression (1B.48b) de ce complément, et de la force classique $F_{cl} = q E_0 \cos \omega t$ agissant sur l'électron :

$$m \frac{d^2}{dt^2} \langle \hat{z} \rangle = -m \omega_0^2 \langle \hat{z} \rangle + f_{ab} \langle \hat{\sigma}_z \rangle F_{cl} \quad (1B.59)$$

Cette équation coïncide avec l'équation fondamentale de la dynamique classique pour la position moyenne de l'électron, avec la force de rappel harmonique $-m \omega_0^2 \langle \hat{z} \rangle$, à deux différences près :

- la présence de la « force d'oscillateur » f_{ab} , qui corrige la force classique d'un facteur sans dimension dépendant de la transition considérée. Pour la raie de résonance d'atomes alcalins comme le sodium par exemple, cette force d'oscillateur est peu différente de un.
- la présence du facteur $\langle \hat{\sigma}_z \rangle$, qui est proportionnel à $P_a - P_b$, P_a et P_b étant les probabilités pour l'atome d'être respectivement dans l'état a ou b .

On retrouve ainsi, par ce calcul quantique, l'équation qui nous a servi de point de départ dans le calcul classique (à la correction de la force d'oscillateur près), lorsque $\langle \hat{\sigma}_z \rangle \approx 1$, c'est-à-dire lorsque le système est dans un état proche de l'état fondamental $|a\rangle$. On en déduit donc que le calcul classique que nous avons mené dans ce complément est valable lorsque la probabilité de transition vers le niveau excité reste faible (régime perturbatif). En revanche, il n'en serait plus de même si le système s'écartait notablement de l'état initial. Par exemple, la force s'annule lorsqu'il y a égalité de population entre les niveaux fondamentaux et excités (phénomène de saturation : voir Chapitre 2 du cours Optique Quantique 1). Elle change même de signe lorsqu'il y a inversion de population.

Chapitre 2

Quantification du rayonnement

Dans le cours « Optique Quantique 1 », l'interaction matière-rayonnement était traitée de manière semi-classique : la matière était quantifiée et le rayonnement traité classiquement. Nous avons pu ainsi décrire un grand nombre de phénomènes, en particulier le fonctionnement des lasers. Nous nous sommes cependant heurtés aux limites de ce modèle : il ne peut pas rendre compte de manière satisfaisante de l'émission spontanée, et nous avons dû introduire ce processus très important de manière phénoménologique.

En fait, une théorie cohérente de l'interaction matière-rayonnement ne peut être que *complètement quantique*. C'est à la quantification du rayonnement que nous consacrons ce chapitre. Nous montrons dans la partie 2.1 comment on peut quantifier le rayonnement en suivant une démarche heuristique, non rigoureuse mais justifiée par les résultats qu'elle permet d'obtenir. Nous décrivons cette procédure dans le cas du champ libre, en l'absence de charges. Dans la partie 2.2, les états propres et les énergies propres du champ quantifié sont déterminés, ce qui permet d'introduire la notion de *photon*, et d'analyser quelques propriétés importantes du champ quantifié. On étudie notamment l'état du champ électromagnétique d'énergie la plus basse, que l'on appelle « *vide* », dans lequel ne se trouve aucun photon, et qui pourtant joue un rôle important en optique quantique via « les fluctuations du vide ». La partie 2.3 étudie les valeurs moyennes de différentes observables relatives au champ dans le cas simple d'un mode unique du champ et pour certains états particuliers du champ : d'une part les états à nombre de photons déterminé ; d'autre part les états « *quasi-classiques* », ainsi nommés parce qu'ils conduisent à des comportements extrêmement proches de ceux d'un champ électromagnétique classique. Comme l'a montré R. Glauber, les états quasi-classiques constituent l'outil de base de la correspondance entre théorie classique et théorie quantique du rayonnement. La partie 2.4 étudie plus en détail les signaux de mesure que l'on peut obtenir à l'aide de photodétecteurs sur différents états du champ : états quasi-classiques ou « *états à un photon* ». On montre en particulier qu'à la différence des états quasi-classiques, les états à un photon peuvent conduire à des résultats de mesure inconcevables dans le cadre du formalisme classique de l'optique ondulatoire, voire en contradiction avec celui-ci. L'ensemble des résultats établis dans ce chapitre nous permet de préciser dans la conclusion quelques aspects de la *dualité*

onde-corpuscule dans le cas de la lumière.

Les développements de ce chapitre sont menés en jauge de Coulomb, où le champ de rayonnement est parfaitement déterminé par le seul potentiel vecteur, qui s'identifie à sa partie transverse $\mathbf{A}_\perp(r)$ (comme on l'a vu au chapitre 1).

Des compléments permettent d'approfondir certains points abordés dans le chapitre. Le complément 2A décrit certains « états non-classiques » du champ de rayonnement, et en particulier les états dits « comprimés ». Il s'agit d'états du champ quantique permettant de réduire les fluctuations d'origine quantique dans les mesures optiques. Le complément 2B détaille les propriétés des « états à un photon », qui sont les états du champ quantique dont les propriétés se rapprochent le plus de celles d'un corpuscule (le photon) se propageant à la vitesse de la lumière. Ces états ont eux aussi un caractère non classique marqué. Le complément 2C présente les paires de photons intriqués, corrélés en polarisation. La violation des inégalités de Bell par des mesures portant sur ces paires intriquées a permis de trancher le débat Boh-Einstein sur la possibilité de compléter la mécanique quantique en introduisant des paramètres supplémentaires. Cette violation a également souligné le caractère fortement non classique des états intriqués. L'intrication est aujourd'hui à la base de nombreuses recherches dans le domaine de l'information quantique.

2.1 Quantification du rayonnement : méthode heuristique

Nous avons signalé à plusieurs reprises dans le chapitre précédent l'analogie qui existe entre un mode du champ électromagnétique classique et un oscillateur harmonique matériel. Cette analogie va nous guider pour la quantification du champ.

2.1.1 Rappels : quantification d'un ensemble d'oscillateurs harmoniques matériels

a. Énergie et hamiltonien

Considérons un ensemble de N oscillateurs harmoniques matériels, indépendants, de même masse m et de pulsations différentes ω_ℓ . L'énergie du système s'écrit :

$$H = \sum_\ell \left(\frac{1}{2m} p_\ell^2 + \frac{1}{2} m \omega_\ell^2 x_\ell^2 \right) \quad (2.1)$$

où x_ℓ et p_ℓ sont la position et l'impulsion de la particule ℓ . La *quantification* d'un tel système¹ consiste à remplacer les variables dynamiques conjugués classiques x_ℓ et p_ℓ par des *opérateurs* \hat{x}_ℓ et \hat{p}_ℓ obéissant aux *règles de commutation* canoniques :

$$\implies \quad [\hat{x}_\ell, \hat{p}_{\ell'}] = i\hbar \delta_{\ell\ell'} \quad (2.2)$$

¹Voir par exemple B.D. chapitre 4 ou CDL chapitre V.

À l'énergie classique H correspond alors un opérateur hamiltonien \hat{H} qui s'écrit :

$$\hat{H} = \sum_{\ell} \left(\frac{1}{2m} \hat{p}_{\ell}^2 + \frac{1}{2} m \omega_{\ell}^2 \hat{x}_{\ell}^2 \right) \quad (2.3)$$

b. Opérateurs d'annihilation et de création \hat{a}_{ℓ} et \hat{a}_{ℓ}^+

Pour connaître la dynamique de cette assemblée d'oscillateurs, il faut trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de l'opérateur \hat{H} . Ce problème est simplifié par l'introduction, pour chaque oscillateur ℓ , de l'opérateur d'annihilation :

$$\hat{a}_{\ell} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega_{\ell}}{\hbar}} \hat{x}_{\ell} + \frac{i}{\sqrt{\hbar m \omega_{\ell}}} \hat{p}_{\ell} \right) \quad (2.4a)$$

L'opérateur \hat{a}_{ℓ} , combinaison linéaire de \hat{x}_{ℓ} et \hat{p}_{ℓ} n'est pas hermitien. Son hermitique conjugué est l'opérateur de création :

$$\hat{a}_{\ell}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega_{\ell}}{\hbar}} \hat{x}_{\ell} - \frac{i}{\sqrt{\hbar m \omega_{\ell}}} \hat{p}_{\ell} \right) \quad (2.4b)$$

En inversant les relations (2.4), on peut exprimer \hat{x}_{ℓ} et \hat{p}_{ℓ} en fonction de \hat{a}_{ℓ} et \hat{a}_{ℓ}^+ :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{\ell} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_{\ell}}} (\hat{a}_{\ell} + \hat{a}_{\ell}^+) \\ \hat{p}_{\ell} &= \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\hbar m \omega_{\ell}}{2}} (\hat{a}_{\ell} - \hat{a}_{\ell}^+) \end{aligned} \quad (2.5)$$

La règle de commutation (2.2) entre \hat{x}_{ℓ} et \hat{p}_{ℓ} permet d'obtenir les règles de commutation suivantes entre opérateurs \hat{a}_{ℓ} et \hat{a}_{ℓ}^+ :

$$\implies [\hat{a}_{\ell}, \hat{a}_{\ell'}] = 0 \quad ; \quad [\hat{a}_{\ell}^+, \hat{a}_{\ell'}^+] = 0 \quad ; \quad [\hat{a}_{\ell}, \hat{a}_{\ell'}^+] = \delta_{\ell\ell'} \quad (2.6)$$

Un intérêt majeur de ces opérateurs est qu'ils permettent d'écrire l'hamiltonien sous une forme particulièrement simple :

$$\hat{H} = \sum_{\ell} \frac{\hbar \omega_{\ell}}{2} (\hat{a}_{\ell}^+ \hat{a}_{\ell} + \hat{a}_{\ell} \hat{a}_{\ell}^+) \quad (2.7)$$

c'est-à-dire encore, en utilisant (2.6) :

$$\implies \hat{H} = \sum_{\ell} \hbar \omega_{\ell} \left(\hat{a}_{\ell}^+ \hat{a}_{\ell} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.8)$$

La diagonalisation de l'hamiltonien \hat{H} se ramène ainsi à celle de l'opérateur

$$\hat{N}_{\ell} = \hat{a}_{\ell}^+ \hat{a}_{\ell} \quad (2.9)$$

qui est élémentaire. On montre² à partir des relations de commutation (2.6) que \hat{N}_ℓ a pour valeurs propres l'ensemble des *nombres entiers* n_ℓ positifs ou nuls, ce qui permet d'établir que l'énergie de l'assemblée d'oscillateurs harmoniques est donnée par l'expressions $\sum_\ell \hbar \omega_\ell (n_\ell + 1/2)$.

c. Autre formulation de la quantification de l'oscillateur matériel

Suivant une démarche parallèle à celle effectuée pour les modes du champ électromagnétique classique dans le chapitre précédent, introduisons pour chaque oscillateur matériel une *variable normale classique* α_ℓ définie par :

$$\alpha_\ell = \sqrt{\frac{m\omega_\ell}{2\hbar}} \left(x_\ell + i \frac{p_\ell}{m\omega_\ell} \right) \quad (2.10)$$

Cette variable est (à un coefficient multiplicatif près choisi pour faciliter le passage entre théorie classique et théorie quantique) analogue à la variable complexe α introduite au paragraphe 1.4. L'énergie classique s'exprime alors en fonction de ces variables normales sous la forme :

$$H = \sum_\ell \hbar \omega_\ell \alpha_\ell \alpha_\ell^* . \quad (2.11)$$

La quantification de la théorie s'effectue alors de la manière suivante :

1. On associe à la variable normale α_ℓ un opérateur \hat{a}_ℓ (et donc à la grandeur conjuguée α_ℓ^* on associe l'opérateur \hat{a}_ℓ^+), et on postule les relations de commutation suivantes :

$$[\hat{a}_\ell, \hat{a}_\ell^+] = \delta_{\ell\ell'} \quad ; \quad [\hat{a}_\ell, \hat{a}_\ell] = [\hat{a}_\ell^+, \hat{a}_\ell^+] = 0 . \quad (2.12)$$

2. À la *grandeur classique* $\alpha_\ell \alpha_\ell^*$ figurant dans l'énergie on associe l'*opérateur symétrisé* $(\hat{a}_\ell^+ \hat{a}_\ell + \hat{a}_\ell \hat{a}_\ell^+)/2$.

Il est clair que cette procédure est équivalente à la précédente, puisque en partant de la définition (2.5) des opérateurs \hat{a}_ℓ et \hat{p}_ℓ et les relations (2.12), on retrouve les règles de commutation (2.2). On retrouve aussi la même forme de l'opérateur hamiltonien \hat{H} .

Partant d'une énergie de la forme (2.11), il est donc possible de quantifier la théorie en imposant les relations de commutations (2.12) relatives aux opérateurs \hat{a}_ℓ et \hat{a}_ℓ^+ sans passer par l'intermédiaire des opérateurs \hat{x}_ℓ et \hat{p}_ℓ .

Remarque

Les deux procédures de quantification considérées ci-dessus ont un caractère heuristique, les règles de commutation entre opérateurs étant imposées sans justification rigoureuse à partir des premiers principes. La procédure rigoureuse de quantification est basée sur la formulation Lagrangienne du problème³. On montre qu'elle conduit à l'une ou l'autre des procédures exposées ici selon le choix des variables du Lagrangien.

²Voir CDL Chapitre V ou B.D. chapitre 7.

³Voir CDG1 § II.A.

2.1.2 Quantification du rayonnement

a. Règles de commutation

En l'absence de sources, l'énergie du champ électromagnétique se réduit à celle de sa partie transverse, qui s'écrit en fonction des champs transverse comme une somme sur tous les modes (Eq. 1.98) :

$$H = \frac{\varepsilon_0}{2L^3} \sum_{\ell} (|\mathcal{E}_{\perp\ell}|^2 + \omega_{\ell}^2 |\mathcal{A}_{\perp\ell}|^2) \quad (2.13)$$

où L^3 est le volume de la boîte, généralement fictive, permettant de définir les composantes de Fourier dans l'espace réciproque. Comme $-\mathcal{E}_{\perp\ell} = \frac{d}{dt} \mathcal{A}_{\perp\ell}$, l'expression (2.13) coïncide avec l'énergie d'un ensemble d'oscillateurs de fréquence ω_{ℓ} , de « masse » $m = \varepsilon_0/L^3$, de « position » $x_{\ell} = \mathcal{A}_{\perp\ell}$ et d'« impulsion » $p_{\ell} = m \frac{dx_{\ell}}{dt} = -\frac{\varepsilon_0}{L^3} \mathcal{E}_{\perp\ell}$. Nous pouvons donc utiliser une procédure analogue à celle du paragraphe (2.1.1.a) pour quantifier la théorie.

Il faut cependant remarquer qu'il y a une difficulté technique liée au fait que les variables $\mathcal{E}_{\perp\ell}$ et $\mathcal{A}_{\perp\ell}$ sont complexes, et non réelles comme p_{ℓ} ou x_{ℓ} . Pour comprendre comment cette difficulté peut être résolue, considérons une variable complexe X , que l'on décomposera en ses parties réelles et imaginaires x_1 et x_2 :

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + ix_2) \quad (2.14)$$

Définissons P l'impulsion généralisée associée à X , par la formule

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 + ip_2) \quad (2.15)$$

où p_1 et p_2 sont les variables conjuguées de x_1 et x_2 . Lorsqu'on quantifie la théorie selon la procédure indiquée plus haut, les seuls commutateurs non nuls entre les opérateurs $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{p}_1, \hat{p}_2$ sont $[\hat{x}_1, \hat{p}_1]$ et $[\hat{x}_2, \hat{p}_2]$ qui valent tous deux $i\hbar$. Il en résulte que les opérateurs \hat{X} et \hat{P} déduits de $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{p}_1, \hat{p}_2$ par des formules analogues à (2.14) et (2.15) commutent entre eux. En revanche le commutateur $[\hat{X}, \hat{P}^+]$ est non nul et vaut :

$$[\hat{X}, \hat{P}^+] = \frac{1}{2}[\hat{x}_1 + i\hat{x}_2, \hat{p}_1 + i\hat{p}_2] = i\hbar. \quad (2.16)$$

En résumé, quand les opérateurs sont associés à des variables complexes⁴, la relation fondamentale de quantification concerne les opérateurs \hat{X} et \hat{P}^+ , et non \hat{X} et \hat{P} .

Dans le cas du système décrit par l'hamiltonien (2.13), la règle de quantification canonique s'écrit donc pour les opérateurs complexes $\hat{\mathcal{A}}_{\perp\ell}$ et $-\frac{\varepsilon_0}{L^3} \hat{\mathcal{E}}_{\perp\ell}$ sous la forme :

$$\left[\hat{\mathcal{A}}_{\perp\ell}, -\frac{\varepsilon_0}{L^3} (\hat{\mathcal{E}}_{\perp\ell'})^+ \right] = i\hbar \delta_{\ell\ell'} \quad (2.17)$$

⁴Pour plus de détail, voir CDG1, § II.A.

ou encore :

$$[\hat{\mathcal{A}}_{\perp\ell}, (\hat{\mathcal{E}}_{\perp\ell})^+] = -i\hbar \frac{L^3}{\varepsilon_0} \delta_{\ell\ell'} \quad (2.18)$$

Définissons alors l'opérateur \hat{a}_ℓ par une relation analogue à (2.4.a) :

$$\hat{a}_\ell = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_0 \omega_\ell}{\hbar L^3}} \hat{\mathcal{A}}_{\perp\ell} - i \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\hbar \omega_\ell L^3}} \hat{\mathcal{E}}_{\perp\ell} \right). \quad (2.19a)$$

Son adjoint \hat{a}_ℓ^+ est égal à :

$$\hat{a}_\ell^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_0 \omega_\ell}{\hbar L^3}} (\hat{\mathcal{A}}_{\perp\ell})^+ - i \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\hbar \omega_\ell L^3}} (\hat{\mathcal{E}}_{\perp\ell})^+ \right). \quad (2.19b)$$

Les relations (2.19) et (2.18) permettent alors de calculer les commutateurs entre opérateurs \hat{a}_ℓ , $\hat{a}_{\ell'}$, \hat{a}_ℓ^+ et $\hat{a}_{\ell'}^+$. On trouve sans difficulté :

$$\implies [\hat{a}_\ell, \hat{a}_{\ell'}^+] = \delta_{\ell\ell'} \quad [\hat{a}_\ell, \hat{a}_{\ell'}] = [\hat{a}_\ell^+, \hat{a}_{\ell'}^+] = 0. \quad (2.20)$$

Les opérateurs \hat{a}_ℓ et \hat{a}_ℓ^+ sont donc les exacts équivalents des opérateurs introduits en (2.4) dans le cas des oscillateurs matériels. Ils sont appelés respectivement opérateurs d'annihilation et de création de photons pour des raisons qui seront clarifiées dans la partie 2.2.

b. Hamiltonien du rayonnement

L'hamiltonien quantique du rayonnement transverse s'obtient simplement en remplaçant dans (2.13) les variables dynamiques $\mathcal{E}_{\perp\ell}$ et $\mathcal{A}_{\perp\ell}$ par les opérateurs $\hat{\mathcal{E}}_{\perp\ell}$ et $\hat{\mathcal{A}}_{\perp\ell}$ obéissant aux règles de commutation (2.17) ou (2.18). Pour suivre l'analogie avec l'oscillateur harmonique, on exprime, à l'aide de (2.19), ces opérateurs en fonction de \hat{a}_ℓ et \hat{a}_ℓ^+ et on trouve

$$\implies \hat{H} = \sum_{\ell} \hbar \omega_\ell \left(\hat{a}_\ell^+ \hat{a}_\ell + \frac{1}{2} \right). \quad (2.21)$$

Cet hamiltonien définit complètement le rayonnement quantifié, dès l'instant où on a les règles de commutation (2.20). Les diverses observables du rayonnement s'expriment à l'aide des \hat{a}_ℓ^+ et \hat{a}_ℓ , en inversant les équations (2.19). En pratique, on peut également utiliser les expressions établies au chapitre 1 en fonction des variables normales du champ.

c. Correspondance avec les variables normales du champ

En comparant l'expression (2.19a) avec la formule (1.58) exprimant la variable normale classique en fonction des champs transverses, on constate que les deux relations sont strictement analogues si on fait le choix suivant de la constante de normalisation C_ℓ (qui était supposée arbitraire dans le chapitre précédent) :

$$\implies C_\ell = \sqrt{\frac{\hbar \omega_\ell L^3}{2\varepsilon_0}} \quad (2.22)$$

L'opérateur \hat{a}_ℓ est alors le *correspondant quantique de la variable normale classique* α_ℓ .

On peut alors utiliser les expressions établies au chapitre 1, et remplacer les variables normales classiques par les opérateurs \hat{a}_ℓ et \hat{a}_ℓ^+ , en prenant garde de symétriser les expressions lorsque les relations de commutation l'imposent. Prenons l'exemple de l'hamiltonien du rayonnement qui s'écrit en fonction des variables normales sous la forme (1.97) :

$$H = \frac{2\varepsilon_0}{L^3} \sum_\ell C_\ell^2 \alpha_\ell \alpha_\ell^* \quad (2.23)$$

soit encore, avec le choix (2.22) de la constante de normalisation :

$$H = \sum_\ell \hbar \omega_\ell \alpha_\ell \alpha_\ell^* . \quad (2.24)$$

Nous en déduisons l'expression suivante pour l'opérateur hamiltonien \hat{H} (en ayant soin de remplacer la quantité classique $\alpha_\ell \alpha_\ell^*$ par l'opérateur quantique correspondant *symétrisé*) :

$$\implies \hat{H} = \frac{1}{2} \sum_\ell \hbar \omega_\ell (\hat{a}_\ell^+ \hat{a}_\ell + \hat{a}_\ell \hat{a}_\ell^+) = \sum_\ell \hbar \omega_\ell \left(\hat{a}_\ell^+ \hat{a}_\ell + \frac{1}{2} \right) . \quad (2.25)$$

On retrouve bien l'expression (2.21).

d. Autre formulation de la quantification

De la même manière que pour l'oscillateur matériel, on aurait pu quantifier la théorie directement sur les variables α_ℓ en partant de l'expression (2.23) de l'hamiltonien. La valeur (2.22) de la constante de normalisation est choisie de façon à obtenir une totale équivalence avec l'énergie (2.11) d'un ensemble d'oscillateurs harmoniques. On impose alors aux opérateurs \hat{a}_ℓ associés aux variables α_ℓ d'obéir aux relations de commutation (2.20). Cette approche, présentée dans de nombreux ouvrages, conduit évidemment aux mêmes résultats que celle que nous venons de présenter.

2.1.3 Observables physiques : champs ; impulsion

Nous pouvons maintenant donner les expressions des opérateurs ou observables associés aux différentes grandeurs physiques du problème.

a. Opérateurs champs

On les déduit des expressions (1.76) (1.77) et (1.78) du chapitre précédent en remplaçant les variables normales classiques par les opérateurs quantiques associés. On obtient :

$$\implies \hat{\mathbf{E}}_\perp(\mathbf{r}) = i \sum_\ell \mathcal{E}_\ell \vec{\mathcal{E}}_\ell (\hat{a}_\ell e^{i\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r}} - \hat{a}_\ell^+ e^{i\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r}}) , \quad (2.26a)$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = i \sum_{\ell} \mathcal{E}_{\ell} \frac{\mathbf{k}_{\ell} \times \vec{\mathcal{E}}_{\ell}}{\omega_{\ell}} (\hat{a}_{\ell} e^{i\mathbf{k}_{\ell} \cdot \mathbf{r}} - \hat{a}_{\ell}^{\dagger} e^{-i\mathbf{k}_{\ell} \cdot \mathbf{r}}), \quad (2.26b)$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{A}}_{\perp}(\mathbf{r}) = \sum_{\ell} \frac{\mathcal{E}_{\ell}}{\omega_{\ell}} \vec{\mathcal{E}}_{\ell} (\hat{a}_{\ell} e^{i\mathbf{k}_{\ell} \cdot \mathbf{r}} + \hat{a}_{\ell}^{\dagger} e^{-i\mathbf{k}_{\ell} \cdot \mathbf{r}}). \quad (2.26c)$$

La quantité \mathcal{E}_{ℓ} , qui a la dimension d'un champ électrique, se déduit des équations (1.76-1.78) et (2.22). Elle vaut :

$$\Rightarrow \mathcal{E}_{\ell} = \sqrt{\frac{\hbar \omega_{\ell}}{2\varepsilon_0 L^3}} \quad (2.27)$$

Elle est telle qu'un champ électrique classique s'écrivant $i\mathcal{E}_{\ell} \vec{\mathcal{E}}_{\ell} (\exp i(\mathbf{k}_{\ell} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\ell} t) - c.c.)$ a une énergie électromagnétique moyenne dans le volume L^3 égale à $\hbar \omega_{\ell}$. Précisons que, dans les formules (2.26), \mathbf{r} n'est pas un opérateur, mais un ensemble de trois paramètres, qui sont les coordonnées du point où les différents opérateurs sont évalués.

Il est souvent commode de séparer dans l'expression (2.26) des champs la contribution des opérateurs de création et d'annihilation. Par exemple, le champ électrique se décompose en :

$$\hat{\mathbf{E}}_{\perp}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}), \quad (2.28)$$

où $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r})$, appelé « partie du champ de fréquence positive », est donné par l'expression :

$$\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}) = i \sum_{\ell} \mathcal{E}_{\ell} \vec{\mathcal{E}}_{\ell} \hat{a}_{\ell} e^{i\mathbf{k}_{\ell} \cdot \mathbf{r}}, \quad (2.29)$$

$\hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r})$ étant l'opérateur conjugué hermitique de $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r})$. L'opérateur $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r})$ est l'analogue quantique du champ complexe classique, ou signal analytique, défini en (1.80).

b. Opérateur impulsion

Compte tenu de la valeur (2.22) de C_{ℓ} , l'impulsion du champ libre $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{trans}}$, donnée par l'expression (1.102), devient :

$$\mathbf{P} = \sum_{\ell} \hbar \mathbf{k}_{\ell} \alpha_{\ell}^* \alpha_{\ell}. \quad (2.30)$$

L'opérateur quantique associé s'écrit alors, en utilisant la même procédure que pour l'énergie :

$$\hat{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} \sum_{\ell} (\hbar \mathbf{k}_{\ell} (\hat{a}_{\ell} \hat{a}_{\ell}^{\dagger} + \hat{a}_{\ell}^{\dagger} \hat{a}_{\ell})) = \sum_{\ell} \hbar \mathbf{k}_{\ell} \left(\hat{a}_{\ell}^{\dagger} \hat{a}_{\ell} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.31)$$

Les termes relatifs à \mathbf{k}_{ℓ} et $-\mathbf{k}_{\ell}$ se compensent dans la somme $\sum_{\ell} \hbar \mathbf{k}_{\ell}$ qui est nulle. L'opérateur impulsion du rayonnement a finalement une expression extrêmement simple :

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{P}} = \sum_{\ell} \hbar \mathbf{k}_{\ell} \hat{a}_{\ell}^{\dagger} \hat{a}_{\ell}. \quad (2.32)$$

Remarque :

L'expression (2.32) de l'impulsion du champ libre n'est valable que si on a décomposé le champ sur des modes qui sont des ondes plans progressives (cf. chapitre 1, § 1.5.2).

2.2 États stationnaires du rayonnement

Nous allons maintenant déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de l'hamiltonien (2.25) du champ libre.

2.2.1 Diagonalisation de l'hamiltonien du champ libre

L'hamiltonien \hat{H} apparaît comme une combinaison linéaire d'opérateur \hat{N}_ℓ définis par :

$$\hat{N}_\ell = \hat{a}_\ell^+ \hat{a}_\ell . \quad (2.33a)$$

Il s'écrit :

$$\hat{H} = \sum_\ell \hbar\omega_\ell \left(\hat{N}_\ell + \frac{1}{2} \right) . \quad (2.33b)$$

Les relations de commutation (2.20) sont suffisantes pour établir que chaque opérateur \hat{N}_ℓ a pour valeurs propres l'ensemble des *entiers positifs ou nuls*, et d'autre part que les opérateurs \hat{N}_ℓ *commutent entre eux*⁵. Il existe donc des vecteurs propres, notés $|n_\ell\rangle$, tels que :

$$\hat{N}_\ell |n_\ell\rangle = n_\ell |n_\ell\rangle \quad n_\ell = 0, 1, 2, \dots \quad (2.34)$$

Ces vecteurs forment une base de l'espace de Hilbert \mathcal{F}_ℓ des états du champ dans le mode ℓ . Le tableau 1 rappelle les propriétés essentielles des états $|n_\ell\rangle$, appelés « états nombres ». Nous les utiliserons souvent dans la suite de cet ouvrage :

$\hat{a}_\ell n_\ell\rangle = \sqrt{n_\ell} n_\ell - 1\rangle \text{ si } n_\ell \neq 0$ $\hat{a}_\ell 0_\ell\rangle = 0$ $\hat{a}_\ell^+ n_\ell\rangle = \sqrt{n_\ell + 1} n_\ell + 1\rangle$ $ n_\ell\rangle = \frac{(a_\ell^+)^n}{\sqrt{n_\ell!}} 0_\ell\rangle$

Tableau 1 : Relations essentielles pour les états nombres et les opérateurs de création et d'annihilation relatifs à un mode ℓ particulier.

Il est alors facile de voir que les états propres de \hat{H} sont les produits tensoriels pour tous les modes ℓ possibles des états $|n_\ell\rangle$: $|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes \dots \otimes |n_\ell\rangle \otimes \dots$, que nous noterons pour simplifier $|n_1, n_2, \dots, n_\ell, \dots\rangle$. On a alors :

$$\hat{H} |n_1, n_2, \dots, n_\ell, \dots\rangle = \sum_\ell \left(n_\ell + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_\ell |n_1, n_2, \dots, n_\ell, \dots\rangle . \quad (2.35)$$

⁵Voir B.D., chapitre 7 et CDL chapitre V.

Ces états forment une *base* de l'espace des états du champ, qui est le produit tensoriel de tous les espaces \mathcal{F}_ℓ . L'*état fondamental du champ* correspond à tous les entiers n_ℓ pris égaux à 0. Il sera noté $|0\rangle$ pour simplifier :

$$|0\rangle = |n_1 = 0, n_2 = 0, \dots, n_\ell = 0, \dots\rangle. \quad (2.36)$$

Son énergie E_v , qui est l'énergie minimale du champ électromagnétique quantifié, vaut :

$$E_v = \sum_\ell \frac{1}{2} \hbar \omega_\ell. \quad (2.37)$$

Tout état propre peut se déduire de l'état fondamental $|0\rangle$ par l'application d'un produit d'opérateurs \hat{a}_ℓ^+ . Plus précisément, en généralisant la dernière ligne du tableau 1, on peut écrire :

$$|n_1, n_2, \dots, n_\ell, \dots\rangle = \frac{(\hat{a}_1^+)^{n_1} (\hat{a}_2^+)^{n_2} \dots (\hat{a}_\ell^+)^{n_\ell} \dots |0\rangle}{\sqrt{n_1! n_2! \dots n_\ell! \dots}} \quad (2.38)$$

2.2.2 Notion de photon

La comparaison des expressions (2.25) et (2.32) montre que les vecteurs propres (2.35) de l'hamiltonien sont aussi vecteurs propres de l'opérateur impulsion $\hat{\mathbf{P}}$

$$\hat{\mathbf{P}}|n_1, n_2, \dots, n_\ell, \dots\rangle = \sum_\ell n_\ell \hbar \mathbf{k}_\ell |n_1, n_2, \dots, n_\ell, \dots\rangle. \quad (2.39)$$

À cause du caractère *additif* des expressions (2.35) et (2.39) de l'énergie et de l'impulsion, tout se passe donc comme si l'état $|n_1, \dots, n_\ell, \dots\rangle$ correspondait à un *ensemble de particules indépendantes* comportant n_1 particules d'énergie $\hbar \omega_1$ et d'impulsion $\hbar \mathbf{k}_1, \dots, n_\ell$ particules d'énergie $\hbar \omega_\ell$ et d'impulsion $\hbar \mathbf{k}_\ell, \dots$. Ces particules sont appelées les **photons** et décrivent les excitations élémentaires de chacun des modes du champ électromagnétique quantifié^{6,7}.

L'*état fondamental* $|0\rangle$, dans lequel tous les n_ℓ sont nuls, ne contient donc aucun photon. On l'appelle le « *vide de photons* », ou encore « *vide* ».

Le tableau 1 montre que l'opérateur \hat{a}_ℓ^+ augmente le nombre de photons dans le mode ℓ d'une unité. C'est pour cette raison qu'on l'appelle *opérateur de création*. Pour une raison analogue, \hat{a}_ℓ , qui diminue le nombre de photons d'une unité, est appelé *opérateur d'annihilation, ou de destruction*. Le nombre total de photons dans le champ est décrit par l'opérateur :

$$\hat{N} = \sum_\ell \hat{N}_\ell = \sum_\ell \hat{a}_\ell^+ \hat{a}_\ell \quad (2.40)$$

⁶On trouve en mécanique quantique de nombreux exemples de systèmes physiques se comportant classiquement comme une assemblée d'oscillateurs indépendants, et quantiquement comme un ensemble de particules indépendantes. Les phonons, issus de la quantification des vibrations d'un réseau cristallin, en sont un autre exemple.

⁷Puisque le nombre de photons dans un mode ℓ peut être un entier quelconque, les photons sont des *bosons*. Voir R. Balian, *Physique Statistique*, chapitre VII (éditions Ellipses).

Cet opérateur, appelé *nombre de photons*, est associé à la mesure, en principe réalisable, du nombre total de photons contenu dans le volume de discrétisation. Dans le cas où ce volume coïncide avec celui d'une cavité réelle (voir Complément 3.5), on peut par exemple imaginer qu'on ouvre brusquement cette cavité et qu'on recueille le champ sortant sur des compteurs de photons dont on somme les résultats.

2.2.3 Propriétés du vide, état fondamental du champ

a. Discussion qualitative

Pour un oscillateur harmonique matériel, on sait que la relation d'incertitude de Heisenberg $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$, conséquence directe de la non commutation des opérateurs \hat{x} et \hat{p} , empêche le système d'atteindre un état de repos total où x et p sont simultanément nuls de manière certaine. L'état d'énergie le plus bas résulte d'un compromis entre énergie cinétique (proportionnelle à p^2) et potentielle (proportionnelle à x^2) compatible avec la relation de Heisenberg. C'est pourquoi cet état a une énergie non nulle $\hbar\omega/2$ (« énergie de point zéro »), et une extension finie à la fois en position et en impulsion autour d'une valeur moyenne nulle.

Il en est de même pour le champ électromagnétique. En effet, la relation de commutation (2.18) implique la relation de Heisenberg :

$$\Delta \mathcal{A}_{\perp \ell} \Delta \mathcal{E}_{\perp \ell} \geq \frac{\hbar L^3}{2\epsilon_0} . \quad (2.41)$$

Il est donc *impossible* d'annuler simultanément le champ électrique et le potentiel vecteur transverse (et donc le champ magnétique) dans un mode quelconque ℓ . C'est la raison pour laquelle dans l'état fondamental $|0\rangle$, l'énergie E_v , mais aussi les variances de \mathbf{A} et de \mathbf{E} sont non nulles. Il s'agit là d'un *effet purement quantique*.

b. Calcul des valeurs moyennes et des variances des champs dans le vide

Pour tout mode ℓ , on a les relations suivantes :

$$\hat{a}_\ell |0\rangle = 0 \quad ; \quad \langle 0 | \hat{a}_\ell^+ = 0 . \quad (2.42)$$

Elles nous permettent d'établir, à partir des expressions (2.26) que :

$$\langle 0 | \hat{\mathbf{E}}_{\perp}(\mathbf{r}) |0\rangle = \langle 0 | \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) |0\rangle = \langle 0 | \hat{\mathbf{A}}_{\perp}(\mathbf{r}) |0\rangle = 0 . \quad (2.43)$$

Dans le vide, comme on pouvait s'y attendre, les valeurs moyennes des champs électrique et magnétique et du potentiel vecteur sont nulles.

Calculons maintenant les variances de ces grandeurs dans le vide. En utilisant les relations (2.42) ainsi que la relation :

$$\langle 0 | \hat{a}_j \hat{a}_k^+ |0\rangle = \delta_{jk} , \quad (2.44)$$

on montre que :

$$(\Delta \mathbf{E}_\perp)^2 = \langle 0 | (\hat{\mathbf{E}}_\perp(\mathbf{r}))^2 | 0 \rangle = \sum_\ell (\mathcal{E}_\ell)^2 = \sum_\ell \frac{\hbar \omega_\ell}{2\varepsilon_0 L^2}, \quad (2.45a)$$

$$(\Delta \mathbf{B})^2 = \langle 0 | (\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}))^2 | 0 \rangle = \sum_\ell \frac{1}{c^2} (\mathcal{E}_\ell)^2 = \frac{1}{c^2} \Delta^2 \mathbf{E}_\perp, \quad (2.45b)$$

$$(\Delta \mathbf{A}_\perp)^2 = \langle 0 | (\hat{\mathbf{A}}_\perp(\mathbf{r}))^2 | 0 \rangle = \sum_\ell \frac{1}{\omega_\ell^2} (\mathcal{E}_\ell)^2 = \sum_\ell \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 L^3}. \quad (2.45c)$$

La théorie quantique nous montre ainsi que même dans son état fondamental, le champ de rayonnement est le siège de fluctuations non nulles, données par les expressions (2.45), appelées **fluctuations du vide**. L'existence de telles fluctuations permet de comprendre intuitivement pourquoi les *propriétés d'un atome sont modifiées par le couplage avec le vide* : les fluctuations du vide peuvent d'une part induire des transitions entre niveaux ; c'est le phénomène d'*émission spontanée*, qui sera étudié en détail dans le chapitre 3. Elles sont d'autre part responsables de *déplacements radiatifs*⁸ des niveaux atomiques. Un exemple particulièrement important de déplacement radiatif est celui responsable de l'existence d'une levée de dégénérescence entre les niveaux $2S_{1/2}$ et $2P_{1/2}$ de l'hydrogène, que l'on appelle *déplacement de Lamb*⁹.

Lorsque le volume L^3 de la boîte tend vers l'infini, on peut remplacer dans les formules (2.45) la somme sur ℓ par une intégrale (§ 1.1.1.2.b). On constate alors que les variances des différents champs sont données par des *intégrales divergentes*¹⁰. De même, si l'on calcule sans précaution les déplacements radiatifs à partir des expressions (2.45) des variances des champs dans le vide, la sommation sur tous les modes du champ introduit des intégrales divergentes, et on va donc trouver une valeur infinie. En 1947, Schwinger, Feynman et Tomonaga montrèrent qu'il est possible, par une procédure dite de « renormalisation », de se débarrasser du problème des grandeurs infinies qui apparaissent souvent en théorie quantique du rayonnement. Ils furent en mesure de calculer des valeurs finies pour tous les effets observables. Leur méthode permit de calculer la valeur du déplacement de Lamb, qui venait d'être mesuré par Lamb et Retherford. L'accord entre valeur théorique et

⁸On a vu dans le cours « Optique Quantique 1 », § 2.3.4 que, sous l'effet d'un champ classique oscillant, les niveaux atomiques étaient déplacés d'une quantité proportionnelle au carré de l'amplitude de ce champ. Le déplacement de Lamb peut être interprété comme le déplacement des niveaux atomiques sous l'effet du champ électrique fluctuant du vide.

⁹La théorie relativiste d'un atome d'hydrogène isolé (théorie de Dirac) prévoit que les niveaux $nS_{1/2}$ et $nP_{1/2}$ ont la même énergie. Si on couple cet atome avec le vide, les niveaux excités deviennent instables, et de plus ces deux niveaux sont déplacés de manière différente. L'écart entre ces niveaux, mesuré pour la première fois en 1947 par Lamb et Retherford, est de l'ordre de 1 GHz. Il est d'environ 10^7 fois plus petit que l'énergie de liaison de l'atome d'hydrogène. Pour plus de détails sur la façon dont ce déplacement peut être estimé, voir par exemple CDG 2 exercice 7, où l'évaluation heuristique proposée originellement par Bethe est détaillée.

¹⁰On peut montrer en revanche que si on calcule ces variances non pas en un point \mathbf{r} , mais dans une zone d'extension finie Δr autour de \mathbf{r} , les variances ont une valeur finie.

expérimentale a constitué une éclatante confirmation de la validité de l'électrodynamique quantique. Ce déplacement est aujourd'hui une des grandeurs physiques mesurées avec la plus grande précision, et la comparaison entre expérience et théorie reste un moyen privilégié de tester la validité de l'électrodynamique quantique.

Dans ce chapitre et le suivant, nous nous restreindrons à des problèmes dans lesquels les sommations sur un nombre infini de modes, responsables de la divergence, n'interviennent pas. Nous pourrions donc nous contenter de l'approche simple développée dans ce chapitre. Le lecteur intéressé par une théorie plus élaborée de l'électrodynamique quantique pourra consulter des ouvrages plus avancés¹¹.

2.3 Rayonnement monomode

2.3.1 Champ classique monomode

Il existe de nombreuses situations physiques que l'on peut décrire en considérant un mode unique du champ. En particulier un faisceau lumineux issu d'un laser monomode peut être associé à un mode unique ℓ du champ correspondant à la polarisation $\vec{\epsilon}_\ell$, à la pulsation $\omega_\ell = c|\mathbf{k}_\ell|$ et à la direction du propagation $\mathbf{k}_\ell/|\mathbf{k}_\ell|$ de ce faisceau, et cela dans tous les problèmes où les effets transverses dus à la diffraction sont négligeables. Pour un tel mode se propageant dans une région de l'espace sans charges, le champ électrique classique $\mathbf{E}_{\text{cl}}(\mathbf{r}, t)$ est donné par l'expression (1.89) du champ libre, restreinte à un seul mode ℓ du rayonnement

$$\mathbf{E}_{\text{cl}}(\mathbf{r}, t) = i\mathcal{E}_\ell \vec{\epsilon}_\ell \left(\alpha_\ell e^{i(\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r} - \omega_\ell t)} - \alpha_\ell^* e^{-i(\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r} - \omega_\ell t)} \right). \quad (2.46)$$

On peut récrire cette expression en fonction de la phase et de l'amplitude de la constante complexe $\alpha_\ell = |\alpha_\ell| e^{i\varphi_\ell}$:

$$\mathbf{E}_{\text{cl}}(\mathbf{r}, t) = -2\mathcal{E}_\ell |\alpha_\ell| \vec{\epsilon}_\ell \sin(\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r} - \omega_\ell t + \varphi_\ell). \quad (2.47)$$

Il s'agit d'une onde plane se propageant à la vitesse c . Elle est entièrement déterminée par les constantes $|\alpha_\ell|$ et φ_ℓ , une fois le mode précisé, c'est-à-dire \mathbf{k}_ℓ et $\vec{\epsilon}_\ell$ fixés. Nous allons maintenant aborder l'étude des propriétés quantiques du même mode, et préciser les similitudes et les différences entre les descriptions classiques et quantiques d'un champ monomode.

¹¹- Jauch J.M., Rohrlich F. (1955) *The quantum theory of photons and electrons*, Addison-Wesley (Reading).

- Bogoliubov N., Shirkov D. (1960) *Introduction à la théorie quantique des champs*, Dunod (Paris).

- Bjorken J.D., Drell S.D. (1964) *Relativistic quantum mechanics*, McGraw-Hill (New York).

- Roman P. (1965) *Advanced quantum theory*, Addison-Wesley (Reading, Mass).

- Itzykson C., Zuber J.B. (1980) *Quantum field theory*, McGraw-Hill (New York).

Remarque

Plus généralement, un ensemble complet de fonctions orthonormées formant une base de l'espace des fonctions $\mathbf{E}_{\text{cl}}(\mathbf{r}, t)$ constitue un ensemble de modes sur lequel on peut décomposer tout champ électromagnétique. Pour certains problèmes, on peut avoir intérêt à utiliser d'autres bases que celle des ondes planes progressives (2.46). Par exemple, les modes gaussiens sont bien adaptés à la description d'un faisceau laser limité transversalement et donc soumis à la diffraction, puisqu'il est généralement possible de décrire ce faisceau par un mode gaussien unique judicieusement choisi. De même, dans le cas d'une onde stationnaire, on pourra considérer un champ de la forme $\mathbf{E}_{\text{cl}}(\mathbf{r}, t) = 2\mathcal{E}_\ell |\alpha_\ell| \vec{\varepsilon}_\ell \sin(\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r}) \cos(\omega_\ell t + \varphi_\ell)$ comme un mode unique, et non pas comme la superposition de deux ondes progressives se propageant dans des directions opposées. Le choix de la base peut grandement faciliter l'étude de certaines situations.

2.3.2 États nombres $|n_\ell\rangle$

Parmi tous les états propres de l'hamiltonien du rayonnement libre, donnés par (2.38), considérons les états $|n_1 = 0, n_2 = 0, \dots, n_{\ell-1} = 0, n_\ell, n_{\ell+1} = 0, \dots\rangle$, que nous noterons $|n_\ell\rangle$ pour simplifier. L'ensemble de ces états constitue une base de l'espace \mathcal{F}_ℓ des états associés au seul mode ℓ , les autres modes restant dans leur état fondamental, espace auquel nous nous limiterons dans toutes cette partie. Un état tel que $|n_\ell\rangle$ est appelé pour des raisons évidentes « *état nombre* » (ou *état de Fock*). C'est un état propre de l'hamiltonien donc un état stationnaire du champ. Il ressort alors du tableau I et de l'orthogonalité des états nombres $|n_\ell\rangle$ que la valeur moyenne du champ électrique transverse (Equation 2.26a) et du champ magnétique (Equation 2.26b) est nulle dans un tel état :

$$\langle n_\ell | \hat{\mathbf{E}}_\perp(\mathbf{r}) | n_\ell \rangle = \langle n_\ell | \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) | n_\ell \rangle = \langle n_\ell | \hat{\mathbf{A}}_\perp(\mathbf{r}) | n_\ell \rangle = 0. \quad (2.48)$$

Si le champ est dans un état nombre à l'instant $t = 0$, il reste dans cet état à tout instant ultérieur. Il s'ensuit que la propriété (2.48) est vraie à tout instant t .

Calculons maintenant la variance des champs dans un tel état. Une méthode identique à celle du paragraphe 2.2.3b permet d'établir que :

$$c^2(\Delta\mathbf{B})^2 = (\Delta\mathbf{E}_\perp)^2 = \langle n_\ell | (\hat{\mathbf{E}}_\perp(\mathbf{r}))^2 | n_\ell \rangle = (2n_\ell + 1)(\mathcal{E}_\ell)^2 \quad (2.49)$$

soit encore :

$$c^2(\Delta\mathbf{B})^2 = (\Delta\mathbf{E}_\perp)^2 = \left(n_\ell + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar\omega_\ell}{\varepsilon_0 L^3} = \frac{E_{n_\ell}}{\varepsilon_0 L^3} \quad (2.50)$$

E_{n_ℓ} étant l'énergie de l'état nombre considéré. La variance des champs croît donc avec n_ℓ comme l'énergie de l'état. Pour $n_\ell = 0$, on retrouve la valeur $(\mathcal{E}_\ell)^2$, qui donne l'échelle des fluctuations du vide dans le mode ℓ (voir Eq. 2.45).

Les états nombres $|n_\ell\rangle$, états propres de l'hamiltonien, qui forment une base de l'espace des états du champ dans le mode ℓ , ont donc certaines propriétés qui sont loin de correspondre à l'idée intuitive de champ d'une onde électromagnétique monomode, puisque les valeurs moyennes n'oscillent pas à la fréquence ω_ℓ . En revanche, la relation (2.50) entre énergie et variance des champs est la même que pour un champ classique. Nous verrons au paragraphe 2.3.4 comment on peut se représenter de façon imagée un tel champ.

2.3.3 États quasi-classiques $|\alpha_\ell\rangle$

Nous allons maintenant montrer qu'il existe une classe d'états quantiques, appelés *états quasi-classiques* (ou états cohérents de Glauber), dont les propriétés, à la différence de celles des états nombres, sont très proches de celles d'un champ classique.

a. Définition et propriétés

On appelle état quasi-classique $|\alpha_\ell\rangle$ du mode ℓ l'état propre de l'opérateur d'annihilation \hat{a}_ℓ associé à la valeur propre α_ℓ :

$$\hat{a}_\ell|\alpha_\ell\rangle = \alpha_\ell|\alpha_\ell\rangle. \quad (2.51)$$

L'opérateur \hat{a}_ℓ étant non hermitien, l'existence de tels états doit être démontrée. Décomposons l'état $|\alpha_\ell\rangle$ sur la base des états nombres $|n_\ell\rangle$ du mode considéré :

$$|\alpha_\ell\rangle = \sum_{n_\ell=0}^{\infty} c_{n_\ell}|n_\ell\rangle. \quad (2.52)$$

En utilisant la relation $\langle n_\ell|\hat{a}_\ell^\dagger = \sqrt{n_\ell+1}\langle n_\ell+1|$, on obtient une relation de récurrence entre les coefficients de cette décomposition :

$$\sqrt{n_\ell} c_{n_\ell} = \alpha_\ell c_{n_\ell-1} \quad (2.53)$$

d'où nous déduisons, à un facteur de phase arbitraire près et après normalisation du vecteur d'état :

$$|\alpha_\ell\rangle = e^{-|\alpha_\ell|^2/2} \sum_{n_\ell=0}^{\infty} \frac{\alpha_\ell^{n_\ell}}{\sqrt{n_\ell!}} |n_\ell\rangle. \quad (2.54)$$

L'expression (2.54) de $|\alpha_\ell\rangle$ montre qu'un tel état existe pour tout α_ℓ complexe¹².

Cet état, étant une superposition d'états propres de l'hamiltonien associés à des valeurs différentes de l'énergie, n'est pas un état propre de l'hamiltonien. Il va donc évoluer dans le temps. Supposons que le système soit à l'instant $t = 0$ dans l'état $|\alpha_\ell\rangle$ (2.54). À un instant t ultérieur, il se trouvera dans l'état :

$$|\psi(t)\rangle = e^{-|\alpha_\ell|^2/2} \sum_{n_\ell=0}^{\infty} \frac{\alpha_\ell^{n_\ell}}{\sqrt{n_\ell!}} e^{-i(n_\ell+\frac{1}{2})\omega_\ell t} |n_\ell\rangle \quad (2.55)$$

puisque $(n_\ell + 1/2)\hbar\omega_\ell$ est l'énergie de l'état $|n_\ell\rangle$. On peut récrire $|\psi(t)\rangle$ sous la forme :

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\omega_\ell t/2} e^{-|\alpha_\ell|^2/2} \sum_{n_\ell=0}^{\infty} \frac{(\alpha_\ell e^{-i\omega_\ell t})^{n_\ell}}{\sqrt{n_\ell!}} |n_\ell\rangle \quad (2.56)$$

¹²Précisons que les vecteurs $|\alpha_\ell\rangle$ ne sont pas orthogonaux et ne forment pas une base de l'espace des états. On trouvera une étude détaillée des propriétés des états quasi-classiques $|\alpha_\ell\rangle$ dans CDG1, ou Glauber R.J., *Quantum optics and electronics*, Les Houches, eds De Witt C.; A. Blandin, C. Cohen-Tannoudji, Gordon and Breach (New York, 1965) ou encore Loudon R. *The quantum theory of light*, Clarendon Press (Oxford 1973).

La comparaison de (2.56) avec (2.54) montre que $|\psi(t)\rangle$ est vecteur propre de \hat{a}_ℓ avec la valeur propre $\alpha_\ell e^{-i\omega_\ell t}$. On aurait pu aussi vérifier directement cette propriété en calculant :

$$\hat{a}_\ell |\psi(t)\rangle = \alpha_\ell e^{-i\omega_\ell t} |\psi(t)\rangle . \quad (2.57)$$

Au cours de son évolution, *un état quasi-classique garde donc son caractère quasi-classique, mais avec une valeur propre $\alpha_\ell e^{-i\omega_\ell t}$ qui évolue au cours du temps.*

b. Nombre de photons dans un état quasi-classique $|\alpha_\ell\rangle$

L'état $|\alpha_\ell e^{-i\omega_\ell t}\rangle$ est une superposition linéaire d'états $|n_\ell\rangle$. La valeur de l'énergie dans un tel état, et celle du nombre de photons, ne peut donc pas être prédite avec certitude. L'expression (2.56) montre que la probabilité $P(n_\ell)$ de trouver la valeur $(n_\ell + 1/2)\hbar\omega_\ell$ pour l'énergie (ou la valeur n_ℓ pour le nombre de photons) est indépendante du temps et vaut :

$$P(n_\ell) = |c_{n_\ell}|^2 = e^{-|\alpha_\ell|^2} \frac{(|\alpha_\ell|^2)^{n_\ell}}{n_\ell!} . \quad (2.58)$$

Il s'agit d'une *distribution de Poisson* de valeur moyenne $|\alpha_\ell|^2$, schématisée sur la figure 2.1.

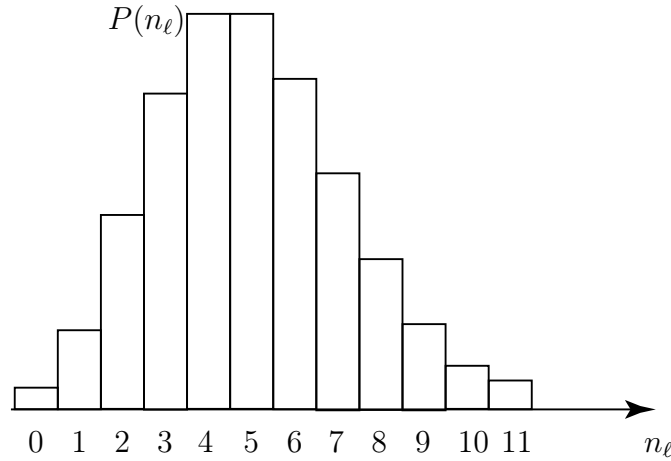


FIG. 2.1: Histogramme de la valeur du nombre de photons lorsque le champ est dans l'état quasi-classique $|\alpha_\ell\rangle$, avec $|\alpha_\ell|^2 = 5$

Il est possible de calculer directement la valeur moyenne et la variance du nombre de photons dans un tel état sans utiliser la distribution (2.58). En se servant de la relation adjointe de (2.51) $\langle \alpha_\ell | \hat{a}_\ell^+ = \alpha_\ell^* \langle \alpha_\ell |$, la valeur moyenne du nombre de photons est égale à :

$$\langle N_\ell \rangle = \langle \alpha_\ell | \hat{a}_\ell^+ \hat{a}_\ell | \alpha_\ell \rangle = |\alpha_\ell|^2 . \quad (2.59)$$

De même, la variance $(\Delta N_\ell)^2$ du nombre de photons est donnée par :

$$\begin{aligned} (\Delta N_\ell)^2 &= \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \langle \alpha_\ell | \hat{a}_\ell^+ \hat{a}_\ell \hat{a}_\ell^+ \hat{a}_\ell | \alpha_\ell \rangle - |\alpha_\ell|^4 \\ &= \langle \alpha_\ell | \hat{a}_\ell^+ (\hat{a}_\ell^+ \hat{a}_\ell + 1) \hat{a}_\ell | \alpha_\ell \rangle - |\alpha_\ell|^4 = |\alpha_\ell|^2 . \end{aligned} \quad (2.60)$$

On trouve donc la valeur suivante pour l'écart quadratique moyen ΔN_ℓ dans un état quasi-classique :

$$\implies \Delta N_\ell = \sqrt{\langle N_\ell \rangle} \quad (2.61)$$

Cette dépendance en $\sqrt{\langle N_\ell \rangle}$ des fluctuations est caractéristique de la distribution de Poisson. Pour les grandes valeurs de $\langle N_\ell \rangle$ (donc de $|\alpha_\ell|$) la distribution $P(n_\ell)$ est caractérisée par une largeur très grande de la variance en valeur absolue ($\Delta N_\ell \rightarrow \infty$), mais très petite en valeur relative ($\Delta N_\ell / \langle N_\ell \rangle \rightarrow 0$).

La distribution (2.58) du nombre de photons dans l'état quasi-classique suggère l'image d'un ensemble de particules indépendantes distribuées aléatoirement avec une densité moyenne uniforme $|\alpha_\ell|^2 / L^3$. Le nombre de photons contenus dans le volume L^3 est alors une variable aléatoire Poissonienne de valeur moyenne $|\alpha_\ell|^2$. Cette image purement corpusculaire de la lumière dans un état quasi-classique est évidemment partielle, parce qu'elle ne peut pas rendre compte de l'aspect ondulatoire du champ. Elle est cependant extrêmement fructueuse dans tous les problèmes où la phase du champ n'intervient pas. Elle permet en particulier de prédire la statistique des résultats des expériences de comptage des photons.

c. Valeur du champ électrique dans un état quasi-classique

L'expression adjointe de (2.57) s'écrit :

$$\langle \psi(t) | \hat{a}_\ell^+ = \alpha_\ell^* e^{i\omega_\ell t} \langle \psi(t) | . \quad (2.62)$$

En utilisant (2.57), (2.62) et l'expression (2.26a) de l'opérateur champ $\hat{\mathbf{E}}_\perp(\mathbf{r})$, on trouve l'expression suivante pour la valeur moyenne du champ électrique :

$$\langle \psi(t) | \hat{\mathbf{E}}_\perp(\mathbf{r}) | \psi(t) \rangle = i\mathcal{E}_\ell \vec{\epsilon}_\ell \left\{ \alpha_\ell e^{i(\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r} - \omega_\ell t)} - \alpha_\ell^* e^{-i(\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r} - \omega_\ell t)} \right\} . \quad (2.63)$$

L'état $|\alpha_\ell\rangle$ est donc un état du champ dont la valeur moyenne évolue dans le temps et dans l'espace comme un champ classique monomode (Eq.2.46). On comprend bien ainsi la dénomination d'état quasi-classique.

On ne peut toutefois associer une image classique à une valeur moyenne quantique que si la variance est suffisamment petite¹³. En utilisant la relation de commutation $[\hat{a}_\ell, \hat{a}_\ell^+] = 1$, on montre facilement que :

$$\langle \psi(t) | (\hat{\mathbf{E}}_\perp(\mathbf{r}))^2 | \psi(t) \rangle = (\langle \psi(t) | \hat{\mathbf{E}}_\perp(\mathbf{r}) | \psi(t) \rangle)^2 + \mathcal{E}_\ell^2 \quad (2.64)$$

À tout instant, la variance du champ électrique vaut donc :

$$(\Delta \mathbf{E}_\perp)^2 = \mathcal{E}_\ell^2 \quad (2.65)$$

¹³Il faut bien comprendre que l'expression (2.63) ne donne qu'une valeur moyenne quantique, c'est-à-dire *un résultat moyenné à un instant donné t sur un grand nombre de mesures différentes* opérées sur des systèmes préparés dans des conditions strictement identiques.

Cette valeur, indépendante de la valeur moyenne (2.63), est la même pour tout état quasi-classique. Elle coïncide avec l'amplitude des fluctuations du champ électrique dans le vide.¹⁴

Les résultats que nous venons d'établir peuvent être résumés par le schéma de la figure 2.2. La courbe en pointillés donne, en un point \mathbf{r} fixé, la valeur moyenne (2.63) du champ, qui oscille en fonction du temps avec une amplitude $2|\alpha_\ell|\mathcal{E}_\ell$. La dispersion autour de cette valeur moyenne, indépendante du temps et égale à $2\mathcal{E}_\ell$, est représentée par la différence des ordonnées entre les deux courbes en traits pleins qui entourent la courbe en pointillés. Ce « ruban » indique donc la zone dans laquelle on a une très forte probabilité de mesurer le champ électrique à l'instant t .

Pour un champ « macroscopique », $|\alpha_\ell|^2$ est nettement plus grand que 1, et l'erreur faite en remplaçant le champ quantique par un champ classique coïncidant avec sa moyenne, est négligeable. Cette situation se rencontre dans le cas d'un laser monomode très au-dessus du seuil, ou pour une onde hertzienne émise par un générateur radioélectrique ou micro-onde. En revanche, si l'état quasi-classique est caractérisé par une valeur du nombre moyen de photons dans le mode $|\alpha_\ell|^2$ proche de 1, la valeur moyenne du champ $|\langle \hat{\mathbf{E}}_\perp(\mathbf{r}) \rangle|$ est du même ordre que ses fluctuations, soit \mathcal{E}_ℓ , on sait qu'il en est ainsi pour le rayonnement thermique où le nombre moyen de photons par mode est petit devant 1 (voir le cours de Physique Statistique). Il en est de même de toute lumière émise par une source traditionnelle. À la différence de la lumière émise par un laser très au-dessus du seuil, la lumière émise par ces sources ne peut donc pas être représentée par une simple onde classique monochromatique. En fait, si on veut éviter le formalisme classique, il faut avoir recours au formalisme de l'optique statistique classique¹⁵.

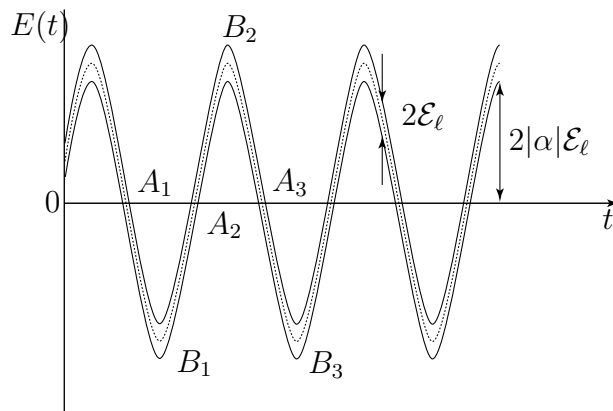


FIG. 2.2: Champ électrique d'un état quasi-classique en fonction du temps : les résultats de mesures vont donner des valeurs du champ ayant une probabilité élevée de se trouver à l'intérieur du « ruban », la moyenne de ces mesures étant donnée par la courbe en pointillés (noter que le ruban a une section constante perpendiculairement à l'axe des temps). La figure est tracée pour un nombre moyen de photons nettement supérieur à 1 (on a pris ici $|\alpha_\ell| = 5$, soit $\langle N_\ell \rangle = 25$).

¹⁴Le vide $|0\rangle$ est en fait un état quasi-classique particulier, associé à la valeur propre $\alpha = 0$ (voir 2.54).

¹⁵J.W. Goodman, *Statistical Optics*, (Wiley, 2000).

2.3.4 Représentation du champ quantique comme un champ classique stochastique

a. Représentation de Fresnel

L'incertitude d'origine quantique dans la mesure du champ peut s'interpréter de manière intuitive comme liée à des fluctuations (ou bruit) de la grandeur classique correspondante qui sera donc représentée comme un processus stochastique¹⁶. Cette image, suggérée par la figure 2.2, est souvent utile, et complémentaire de celle utilisant les photons. Nous allons la détailler dans le présent paragraphe.

Le champ électrique classique dans un mode ℓ peut s'écrire de manière générale, d'après (2.47) :

$$\mathbf{E}_{\text{cl}}(\mathbf{r}, t) = E_\ell \vec{\varepsilon}_\ell \sin(\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r} - \omega_\ell t + \varphi_\ell) \quad (2.66)$$

où $E_\ell = -2|\alpha_\ell|\mathcal{E}_\ell$.

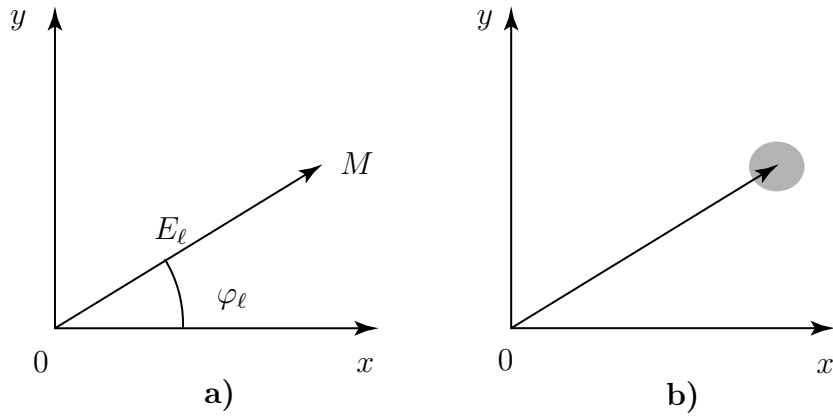


FIG. 2.3: Représentation de Fresnel du champ électrique dans le mode ℓ : a) cas d'un champ classique parfaitement déterminé ; b) représentation d'un champ quantique : l'extrémité du vecteur de Fresnel peut être trouvée dans une région de surface non nulle du plan de Fresnel (on a pris ici l'exemple d'un état quasi-classique).

Comme tout phénomène oscillant, on peut le représenter par un *vecteur de Fresnel* de module E_ℓ et d'angle polaire φ_ℓ (voir Figure 2.3a)¹⁷. Pour obtenir la dépendance temporelle (2.66), il faut faire tourner ce vecteur autour de l'origine en rajoutant à son angle polaire la quantité $-\omega_\ell t$. Le champ électrique est alors la projection de ce vecteur sur l'axe Oy . Si le champ est parfaitement déterminé, comme c'est le cas en électromagnétisme classique lorsqu'on a exactement spécifié les conditions initiales, l'extrémité M de ce vecteur est connue sans incertitude. Supposons maintenant que l'amplitude et la phase de

¹⁶Voir cours de Majeure 1, Optique Quantique 1, Chapitre 6.

¹⁷Si on adopte une représentation complexe du plan, l'extrémité du vecteur de Fresnel est donnée par $2\alpha_\ell$.

ce champ sont des variables aléatoires, qui ont donc des fluctuations statistiques δE_ℓ et $\delta\varphi_\ell$ autour de leurs moyennes E_ℓ et φ_ℓ . L'extrémité M présente un certain « flou », c'est-à-dire qu'on peut trouver le point M dans une région du plan de Fresnel (en grisé sur la figure 2.3a) d'aire non nulle. On réalise la correspondance entre incertitude de nature quantique et fluctuations d'un champ classique stochastique en assimilant les *valeurs moyennes quantiques* des observables et de leurs fluctuations, calculées dans l'état quantique du champ considéré, aux valeurs moyennes des quantités classiques correspondantes calculées par *une moyenne statistique d'ensemble*¹⁸. Cette correspondance doit a priori être calculée à chaque instant.

b. Fluctuations dans un état quasi-classique

Considérons un champ classique stochastique écrit sous la forme (2.66), ayant de petites fluctuations d'amplitude δE_ℓ et de phase $\delta\varphi_\ell$. Les variations correspondantes du champ valent :

$$\delta\mathbf{E}_{cl}(\mathbf{r}, t) = -\vec{\varepsilon}_\ell[\delta E_\ell \sin(\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r} - \omega_\ell t + \varphi_\ell) + E_\ell \delta\varphi_\ell \cos(\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r} - \omega_\ell t + \varphi_\ell)] . \quad (2.67)$$

Ainsi, aux instants t_i où le sinus est nul (points $A_1, A_2 \dots$ de la figure 2.2), l'incertitude sur le champ est due uniquement à l'incertitude sur la phase, alors qu'aux instants t'_i où le cosinus est nul, un quart de période plus tard (points $B_1, B_2 \dots$ de la figure 2.2), elle ne provient que de l'incertitude sur l'amplitude. Si on note par une barre *la moyenne statistique d'ensemble*, on peut écrire, pour les valeurs quadratiques moyennes :

$$\begin{aligned} \overline{(\delta\mathbf{E}_{cl}(\mathbf{r}, t_i))^2} &= E_\ell^2 \overline{(\delta\varphi_\ell)^2} = E_\ell^2 (\Delta\varphi_\ell)^2 , \\ \overline{(\delta\mathbf{E}_{cl}(\mathbf{r}, t'_i))^2} &= \overline{(\delta E_\ell)^2} = (\Delta E_\ell)^2 . \end{aligned} \quad (2.68)$$

Considérons le champ classique stochastique dont la variance statistique (2.68) est égale à la variance quantique de l'opérateur champ dans un état quasi-classique (Equation 2.65). Les deux quantités écrites en (2.68) sont donc égales à \mathcal{E}_ℓ^2 . Sur la figure 2.3b, on représente ce type de fluctuations par une zone d'incertitude circulaire. On a alors pour les incertitudes sur la phase et l'amplitude :

$$\Delta\varphi_\ell = \mathcal{E}_\ell/E_\ell \quad , \quad \Delta E_\ell = \mathcal{E}_\ell . \quad (2.69)$$

On voit alors que l'incertitude d'origine quantique sur la phase du champ électrique d'un état quasi-classique est inversement proportionnelle à l'amplitude moyenne du champ¹⁹, alors que celle sur l'amplitude est constante.

Considérons maintenant les fluctuations sur le nombre de photons N_ℓ , proportionnel au carré de l'amplitude du champ. Plus précisément, on peut écrire pour l'état quasi-classique :

$$N_\ell = |\alpha_\ell|^2 = E_\ell^2/4\mathcal{E}_\ell^2 . \quad (2.70)$$

¹⁸Cette assimilation est possible pour les états quasi-classiques et les états comprimés du complément 2A, mais pas d'une manière non ambiguë pour tous les états quantiques du champ.

¹⁹L'expression de $\Delta\varphi_\ell$ n'a de sens que si E_ℓ est suffisamment grand pour que $\Delta\varphi_\ell$ soit petit devant 2π , et pour que ΔE_ℓ soit petit devant E_ℓ

En utilisant (2.69) on a donc pour l'écart quadratique moyen ΔN_ℓ :

$$\Delta N_\ell = E_\ell \Delta E_\ell / 2\mathcal{E}_\ell^2 = E_\ell / 2\mathcal{E}_\ell . \quad (2.71)$$

Les résultats (2.69) et (2.71) permettent d'écrire une relation du type « relation de dispersion de Heisenberg » pour le produit des incertitudes sur le nombre de photons et sur la phase du champ :

$$\Delta N_\ell \Delta \varphi_\ell = \frac{1}{2} . \quad (2.72)$$

Ainsi, pour un état quasi-classique, ni la phase ni le nombre de photons ne sont déterminés de façon certaine, mais les variances de ces deux grandeurs, qui sont reliées par l'équation (2.72), réalisent un certain compromis pour des mesures simultanées de phase et d'énergie.

c. Fluctuations dans un état nombre

Revenons aux états nombres, pour lesquels $\Delta N_\ell = 0$, puisqu'ils sont *états propres du nombre de photons*. Si on veut les décrire par un champ stochastique du type (2.66), il faut prendre $\Delta E_\ell = 0$ pour assurer une valeur certaine aux mesures du nombre de photons. En revanche, il faut supposer une *phase totalement aléatoire* pour annuler la valeur moyenne du champ électrique (Eq. 2.48). La représentation du champ fluctuant associé est donnée par la figure 2.4a, où le large ruban résulte de la superposition de sinusoïdes d'amplitude constante et de phases aléatoires. L'extrémité du vecteur de Fresnel se trouve donc sur un cercle centré sur l'origine (Figure 2.4b).

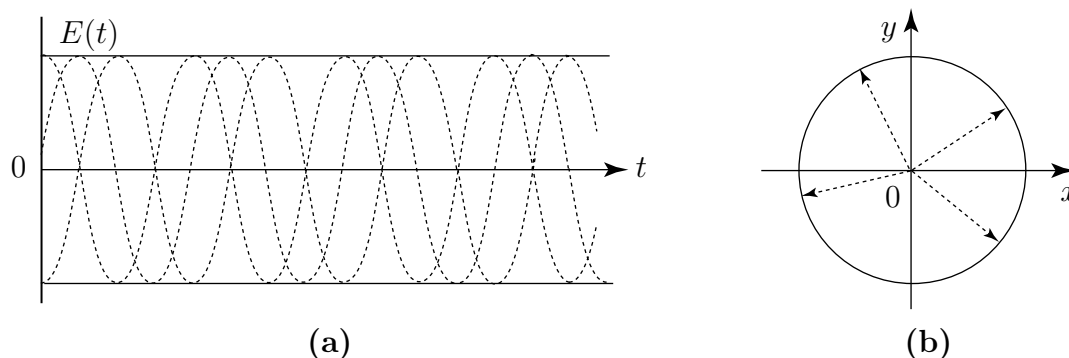


FIG. 2.4: Champ électrique d'un état nombre en fonction du temps : il résulte de la superposition de sinusoïdes d'amplitude fixée et de phases aléatoires. L'extrémité du vecteur de Fresnel correspondant se trouve sur un cercle.

2.3.5 Inégalités de Heisenberg pour un champ monomode quelconque

De manière générale, on peut se demander quelle est la précision maximale avec laquelle on peut connaître la valeur du champ électrique dans un état quantique quelconque.

a. Opérateurs de quadrature du champ

Classiquement, le champ dans un mode donné est complètement défini par un vecteur à 2 dimensions (vecteur du plan de Fresnel). L'opérateur champ électrique du mode ℓ est donc une observable vectorielle à 2 dimensions. Revenons à l'expression de l'opérateur champ électrique (2.26a), restreint au mode ℓ étudié ici :

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = i\mathcal{E}_\ell \vec{\varepsilon}_\ell (\hat{a}_\ell e^{i\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r}} - \hat{a}_\ell^\dagger e^{-i\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r}}) . \quad (2.73)$$

Introduisons les opérateurs hermitiens :

$$\hat{E}_P = \mathcal{E}_\ell (\hat{a}_\ell e^{i\omega_\ell t} + \hat{a}_\ell^\dagger e^{-i\omega_\ell t}) \quad (2.74a)$$

$$\hat{E}_Q = \frac{\mathcal{E}_\ell}{i} (\hat{a}_\ell e^{i\omega_\ell t} - \hat{a}_\ell^\dagger e^{-i\omega_\ell t}) . \quad (2.74b)$$

L'opérateur champ s'écrit alors :

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = -\vec{\varepsilon}_\ell [\hat{E}_P \sin(\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r} - \omega_\ell t) + \hat{E}_Q \cos(\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r} - \omega_\ell t)] . \quad (2.75)$$

L'opérateur \hat{E}_P apparaît donc comme l'opérateur quantique associé à la mesure du champ électrique lorsque $\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r} - \omega_\ell t$ vaut $\pi/2 \pmod{\pi}$. L'opérateur \hat{E}_Q est associé à la mesure du même champ lorsque $\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r} - \omega_\ell t$ vaut $0 \pmod{\pi}$ c'est-à-dire au même point, mais à un instant décalé d'un quart de période optique, ou bien au même instant, un quart de longueur d'onde plus loin (les points A_i et B_i de la figure 2.2 correspondent à de tels couples de mesure « en quadrature » sur le champ). Les opérateurs \hat{E}_P et \hat{E}_Q sont appelés *opérateurs de quadrature du champ*. Les grandeurs classiques associées à ces observables sont les composantes de quadrature du champ classique. Dans le diagramme de Fresnel de la figure 2.3, elles sont les projections du point M sur les axes de coordonnées.

En utilisant les relations de commutation (2.20) on trouve aisément que :

$$\implies [\hat{E}_P, \hat{E}_Q] = 2i\mathcal{E}_\ell^2 \quad (2.76)$$

(\hat{E}_P et \hat{E}_Q étant pris au même instant). Cette relation implique qu'il ne peut exister d'états propres communs à \hat{E}_P et \hat{E}_Q , et donc qu'il n'y a pas d'état du champ qui soit état propre de l'opérateur champ électrique en tout point de l'espace. On peut alors déduire de (2.76) une relation de type Heisenberg, valable pour tout état de rayonnement, et qui s'écrit :

$$\implies \Delta E_P \Delta E_Q \geq \mathcal{E}_\ell^2 . \quad (2.77)$$

Il n'existe donc pas d'état du rayonnement où les deux composantes de quadrature soient *simultanément* déterminées avec une précision absolue. Par exemple, un état du champ présentant une dispersion très faible du champ électrique aux points A_i de la figure 2.2 sera caractérisé par un champ électrique présentant une très grande dispersion aux points B_i .

b. Inégalité de Heisenberg phase-nombre de photons

De la relation (2.77), nous allons déduire, par un raisonnement qualitatif, une inégalité relative à la phase et au nombre de photons dans le cas d'un champ quelconque pour lequel $\langle \hat{N} \rangle \gg 1$. Nous supposons qu'on peut décrire les fluctuations de ce champ par une expression de la forme (2.67). La comparaison de (2.75) et (2.67) montre que les fluctuations des composantes de quadrature sont reliées aux fluctuations d'amplitude et de phase par les relations :

$$\Delta E_P = \Delta E_\ell, \quad (2.78a)$$

$$\Delta E_Q = E_\ell \Delta \varphi_\ell, \quad (2.78b)$$

d'où l'on déduit à partir de (2.77) :

$$\frac{E_\ell \Delta E_\ell}{\mathcal{E}_\ell^2} \Delta \varphi_\ell \geq 1. \quad (2.79)$$

En utilisant l'expression (2.74), nous pouvons écrire l'opérateur nombre de photons sous la forme :

$$\hat{N}_\ell = \frac{1}{2}(\hat{a}_\ell^+ \hat{a}_\ell + \hat{a}_\ell \hat{a}_\ell^+ - 1) = \frac{\hat{E}_P^2 + \hat{E}_Q^2}{4\mathcal{E}_\ell^2} - \frac{1}{2} \quad (2.80)$$

L'opérateur $\hat{E}_P^2 + \hat{E}_Q^2$ est associé à la mesure du carré du module du vecteur champ dans le plan de Fresnel, c'est-à-dire de la grandeur classique E_ℓ^2 . Il s'ensuit qu'on a la correspondance :

$$\Delta N_\ell = \frac{\Delta(E_\ell^2)}{4\mathcal{E}_\ell^2} \cong \frac{2E_\ell \Delta E_\ell}{4\mathcal{E}_\ell^2}. \quad (2.81)$$

En combinant (2.79) et (2.81), nous aboutissons à l'inégalité²⁰ :

$$\implies \Delta N_\ell \Delta \varphi_\ell \geq \frac{1}{2}. \quad (2.82)$$

D'une certaine manière, phase et nombre de photons sont des variables complémentaires au sens de la mécanique quantique au même titre que les composantes de quadrature \hat{E}_P et \hat{E}_Q , et il n'existe pas d'état du champ dans lequel ces deux quantités sont déterminées toutes deux de manière infiniment précise.

²⁰Nous avons ici introduit la phase et ses fluctuations grâce à l'expression du champ classique (2.65) et de ses fluctuations (2.67). Cette grandeur n'est donc bien définie que pour des champs quantiques dont le comportement peut être décrit par de telles expressions, ce qui est loin d'être vérifié pour tous les états du champ. Il faut en particulier que la valeur moyenne du champ soit grande devant ses fluctuations. La relation de Heisenberg (2.82), utile dans certains cas, n'est donc pas rigoureuse. Cette difficulté est liée au fait qu'on ne sait pas définir de manière simple un opérateur phase pour le champ quantique (pour plus de détails, voir S.M. Barnett, D.T. Pegg, *Journal of Modern Optics* **36**, 7 (1989)).

c. État quasi-classique

Revenons maintenant au cas de l'état quasi-classique. Il est facile de montrer qu'à tout instant :

$$\begin{aligned}\langle \alpha(t) | \hat{E}_P(t) | \alpha(t) \rangle &= \langle \alpha(0) | \hat{E}_P(0) | \alpha(0) \rangle = \langle \alpha_\ell | \hat{E}_P | \alpha_\ell \rangle = 2\mathfrak{E}_\ell |\alpha_\ell| \cos \varphi_\ell, \\ \langle \alpha(t) | \hat{E}_Q(t) | \alpha(t) \rangle &= \langle \alpha(0) | \hat{E}_Q(0) | \alpha(0) \rangle = \langle \alpha_\ell | \hat{E}_Q | \alpha_\ell \rangle = 2\mathfrak{E}_\ell |\alpha_\ell| \sin \varphi_\ell,\end{aligned}\tag{2.83}$$

en notant $\alpha_\ell = |\alpha_\ell| e^{i\varphi_\ell}$. Pour calculer les variances, il faut utiliser l'expression du carré des opérateurs champ :

$$\begin{aligned}\hat{E}_{P,Q}^2 &= \pm \mathfrak{E}_\ell^2 (\hat{a}_\ell^2 e^{2i\omega_\ell t} + \hat{a}_\ell^{+2} e^{-2i\omega_\ell t} \pm \hat{a}_\ell^+ \hat{a}_\ell \pm \hat{a}_\ell \hat{a}_\ell^+) \\ &= \pm \mathfrak{E}_\ell^2 (\hat{a}_\ell^2 e^{2i\omega_\ell t} + \hat{a}_\ell^{+2} e^{-2i\omega_\ell t} \pm 2\hat{a}_\ell^+ \hat{a}_\ell \pm 1) .\end{aligned}\tag{2.84}$$

On en déduit après quelques calculs sans difficultés :

$$\Delta E_P = \Delta E_Q = \mathfrak{E}_\ell^2 .\tag{2.85}$$

Cette relation montre d'une part que les états quasi-classiques sont des *états minimaux* pour la relation (2.77), et d'autre part qu'ils réalisent le meilleur compromis en ce qui concerne la mesure simultanée des deux composantes de quadrature du champ, puisqu'ils n'en favorisent aucune : c'est une autre manière de dire que pour un état quasi-classique, la hauteur du « ruban » de la figure (2.47) est la même au points A_i et B_i , et donc en tout point.

d. États « comprimés »

Les états quasi-classiques ne sont pas les seuls états minimaux possibles. Il existe des états appelés « états comprimés » pour lesquels ΔE_Q par exemple est plus petit que \mathfrak{E}_ℓ . La variance ΔE_P est alors nécessairement plus grande que \mathfrak{E}_ℓ , pour que le produit reste égal à \mathfrak{E}_ℓ^2 . La figure 2.5 montre l'allure du champ associé dans un cas particulier d'état comprimé. Le « ruban » est étroit au niveau des intersections A_i avec l'axe des temps, et donc élargi pour les déterminations aux points B_i , une quadrature plus tard. Les relations (2.78) montrent que la phase de ce champ est définie avec une précision plus grande que dans un état quasi-classique. La relation de Heisenberg (2.82) implique alors que l'amplitude de ce champ est plus « bruyante » que celle d'un état cohérent. Un tel état permet de réaliser des mesures de phase de grande précision. Le complément 2A donne un aperçu des propriétés et des méthodes de production de ces états comprimés.

2.3.6 Faisceau lumineux se propageant dans l'espace libre

Les états du champ que nous avons considérés dans cette partie sont associés à des ondes planes occupant l'ensemble du volume V utilisé pour discrétiser l'espace réciproque. Dans le cas où ce volume est réel (cavité optique résonnante), des états de ce type ont une réalité physique indéniable, et on peut effectivement envisager un état formé de n photons

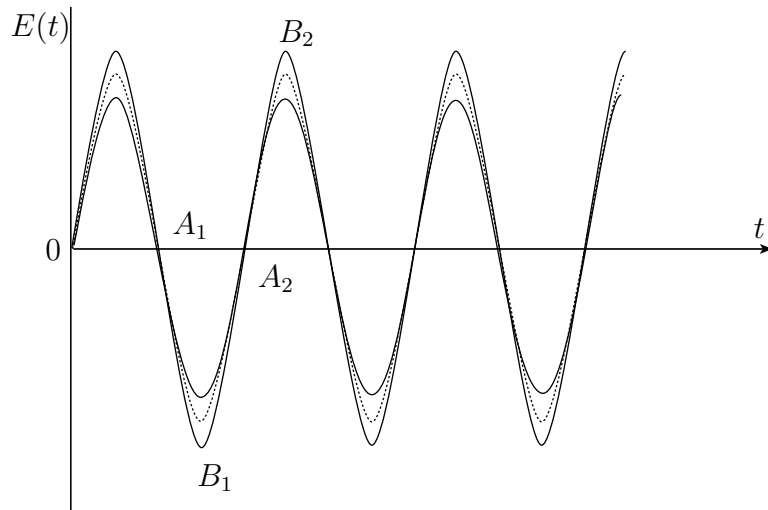


FIG. 2.5: Champ électrique dans un état comprimé en fonction du temps : l'incertitude sur les mesures du champ est réduite par rapport à l'état quasi-classique aux points tels que A_1 . Elle est augmentée aux points tels que B_1 . Un tel état est bien adapté à la détermination précise de la phase du champ.

dans un mode propre de cette cavité, ou bien un état quasi-classique associé à un nombre moyen de photons $\langle \hat{N}_\ell \rangle = |\alpha_\ell|^2$. En revanche, ces états ne décrivent pas a priori un *faisceau lumineux*. Il ne s'agit pas en effet d'un état stationnaire du champ, mais d'un état constamment produit en un point de l'espace par une source (par exemple un laser), et constamment détruit en un autre point (par absorption ou diffusion du rayonnement) après un intervalle plus ou moins long de propagation libre. On ne peut en particulier pas définir le *nombre de photons* dans un tel faisceau. De plus un faisceau lumineux est limité transversalement (voir Complément 3B du cours « Optique Quantique 1 »), et ne peut pas être décrit par une onde plane d'extension transverse tendant vers l'infini. Nous montrons dans ce paragraphe, sans démonstration, qu'on peut cependant dans bien des cas utiliser les états quantiques du champ monomode pour décrire un faisceau laser continu monomode se propageant dans l'espace libre²¹

Soient Φ la puissance lumineuse du faisceau (en W), Π sa puissance lumineuse par unité de surface (Π est encore appelée *éclairage*, et s'exprime en W/m^2), et S sa surface transverse. On peut alors définir sans ambiguïté des quantités « photoniques » comme la *densité de courant de photons* Π^{phot} (nombre de photons traversant un plan perpendiculaire à la direction de propagation par unité de temps et de surface), la *courant de photons* Φ^{phot} (nombre de photons traversant un plan perpendiculaire à la direction de propagation par unité de temps), et la *densité de photons* D^{phot} dans le faisceau, par les

²¹Pour plus de détails, se reporter à H.J. Kimble, Les Houches session 56, p. 603, J. Dalibard, J.M. Raimond éditeurs, (North Holland, Amsterdam 1992), ou bien C. Fabre, Les Houches 1995 : « Quantum fluctuations », S. Reynaud, E. Giacobino éditeurs (North Holland, Amsterdam 1996).

relations :

$$\Pi^{\text{phot}} = \frac{\Pi}{\hbar\omega_\ell}, \quad \Phi^{\text{phot}} = \frac{\Phi}{\hbar\omega_\ell} = S \frac{\Pi}{\hbar\omega_\ell}, \quad D^{\text{phot}} = \frac{1}{c} \frac{\Pi}{\hbar\omega_\ell}. \quad (2.86)$$

À la différence des quantités (2.86), le nombre de photons n_ℓ qui intervient dans les équations écrites plus haut est une quantité non physique, qui dépend du volume L^3 utilisé et des conditions de mesure. Ce nombre n_ℓ est utile seulement dans les calculs intermédiaires : il faudra s'assurer dans chaque cas particulier que le facteur L^3 disparaît des expressions finales concernant des résultats de mesures réelles, qui ne doivent dépendre que de Π^{phot} ou Φ^{phot} , ou encore $D^{\text{phot}} = n_\ell/L^3$ (on trouvera un exemple de ce type de méthode dans le paragraphe 3.4.1).

À titre d'exemple, prenons un faisceau laser monomode de puissance moyenne $\langle\Phi\rangle$ (exprimée en W), de section S , et supposé décrit par un état quasi-classique $|\alpha_\ell\rangle$ dans un mode bien déterminé. Considérons d'autre part un photodétecteur dont la surface est supérieure à l'extension transverse du faisceau et qui intègre l'intensité du faisceau pendant un intervalle de temps de durée T . Il mesure en fait le nombre n_ℓ de photons pendant le temps T , et qui sont contenus dans un volume d'extension cST . La valeur moyenne du nombre de photons vaut :

$$\langle n_\ell \rangle = T \frac{\langle\Phi\rangle}{\hbar\omega_\ell} = T \langle\Phi^{\text{phot}}\rangle \quad (2.87)$$

C'est cette valeur de $\langle n_\ell \rangle$ que l'on va égaler au carré $|\alpha_\ell|^2$ de l'amplitude caractérisant l'état quasi-classique $|\alpha_\ell\rangle$ qui décrit le faisceau laser.

La dispersion des valeurs du nombre de photons dans l'état quasi-classique (voir § 2.3.3b) provoque des fluctuations temporelles (ou « *bruit quantique* ») sur la mesure du courant instantané de photons. L'écart quadratique moyen dans un tel état valant $\Delta n_\ell = |\alpha_\ell| = \sqrt{\langle\hat{N}_\ell\rangle}$ (Eq. 2.61), on en déduit l'écart quadratique moyen des fluctuations du courant de photons $\Delta\Phi^{\text{phot}}$ mesurées par le photodétecteur dans l'intervalle de temps T :

$$\Delta\Phi^{\text{phot}} = \frac{\Delta n_\ell}{T} = \sqrt{\frac{\Delta\Phi^{\text{phot}}}{T}} = \sqrt{\frac{\langle\Phi\rangle}{T\hbar\omega_\ell}} \quad (2.88)$$

Le photodétecteur, supposé parfait, convertit tout photon en électron de charge q . Le photocourant moyen détecté $\langle i \rangle$ et ses fluctuations Δi sont donc égaux respectivement à :

$$\begin{aligned} \langle i \rangle &= q \langle\Phi^{\text{phot}}\rangle = \frac{q \langle\Phi\rangle}{\hbar\omega_\ell}, \\ \Delta i &= q \Delta\Phi^{\text{phot}} = \sqrt{q \frac{\langle i \rangle}{T}} = \sqrt{2q \langle i \rangle B}, \end{aligned} \quad (2.89)$$

en notant $B = 1/2T$ la bande passante de mesure. On trouve ici, pour un faisceau lumineux dans un état quasi-classique, la formule habituelle du *bruit de grenaille* (*shot*

noise en anglais), proportionnel à la racine carrée de la puissance moyenne et de la bande passante. À titre d'exemple, considérons un faisceau lumineux de longueur d'onde $\lambda = 1\mu\text{m}$ et de puissance moyenne $\Phi = 1\text{mW}$ (laser continu de faible puissance), que l'on suppose décrit par un état quasi-classique. Le courant de photons correspondant Φ^{phot} est d'environ 5×10^{15} photons par seconde. Prenons un temps de mesure typique $T = 1\mu\text{s}$. Le nombre moyen de photons comptés est donc de 5×10^9 . D'après la relation (2.88), il en résulte un bruit sur la puissance détectée caractérisé par un écart quadratique moyen $\Delta\Phi = 14n\text{W}$. Cette valeur est mesurable par une photodiode de bonne qualité. Cet exemple montre donc qu'il existe des situations physiques aisément accessibles où les fluctuations d'origine quantique, bien que faibles, sont mesurables²².

Mentionnons pour finir que de l'inégalité de Heisenberg (2.82) entre le nombre de photons et la phase du champ, on peut déduire une inégalité relative à des faisceaux lumineux se trouvant dans un état quelconque et caractérisés par leur puissance, ou le courant de photons associé, et la phase du champ :

$$\begin{aligned}\Delta\Phi\Delta\varphi_\ell &\geq \frac{\hbar\omega_\ell}{2T} = \hbar\omega_\ell B, \\ \Delta\Phi^{\text{phot}}\Delta\varphi_\ell &\geq \frac{1}{2T} = B.\end{aligned}\tag{2.90}$$

On note que ces relations font intervenir la durée de la mesure.

Remarques

(i) On sait qu'on peut obtenir un bruit de grenaille dans le cas de particules matérielles classiques ponctuelles indépendantes, décrites par la statistique de Poisson, arrivant sur un détecteur (grains de sable frappant une paroi, par exemple). On peut donc se représenter un faisceau dans un état quasi-classique comme formé de photons considérés comme des particules se propageant de manière indépendante.

(ii) Le bruit de grenaille dans la photodétection est ici obtenu à partir des propriétés spécifiquement quantiques du faisceau lumineux, le photodétecteur se contentant de les convertir en propriétés électriques. On trouvera dans de nombreux ouvrages des démonstrations présentant le bruit de grenaille dans la photodétection comme une conséquence des propriétés quantiques du processus de photodétection lui-même : il apparaît alors comme un *bruit de mesure*, indépendant de l'état du champ arrivant sur le détecteur. Tout dépend en fait de la « qualité » du photodétecteur, exprimée par son rendement quantique η (pourcentage de photons effectivement convertis en électrons). L'approche développée ici est justifiée lorsque $\eta = 1$, alors que l'approche mentionnée dans cette remarque s'applique pour $\eta \ll 1$. Précisons que si les photomultiplicateurs utilisés en comptage de photons ont effectivement des rendements inférieurs à 10%, il existe sur les marchés des photodiodes pour le domaine visible et proche infrarouge qui ont des rendements quantiques supérieurs à 90%. Dans ce cas, l'approche que nous donnons ici est indispensable pour décrire les faits observés.

(iii) Il existe des faisceaux lumineux pour lesquels le bruit de photodétection est inférieur au bruit de grenaille donné par les relations (2.88) et (2.89). De tels faisceaux, produits par des méthodes décrites dans le Complément (2E), sont souvent qualifiés de « faisceaux

²²Il est beaucoup plus difficile d'atteindre ce régime pour les mesures de position et d'impulsion d'une particule. L'optique est donc un domaine privilégié pour tester les postulats concernant la mesure en mécanique quantique.

sub-Poissoniens ». Dans ce type de situation, seul s'applique le traitement présenté ici, dans lequel la lumière est quantifiée. L'approche semi-classique présentée à la remarque (ii) est incapable de prédire un bruit de détection inférieur au bruit de grenaille.

2.4 Signaux de photodétection

Jusqu'à présent nous avons introduit d'une part des *observables* relatives à un certain nombre de grandeurs caractérisant le champ électromagnétique, et d'autre part des *états quantiques* dans lesquels se trouve le champ. Pour décrire les expériences d'optique au niveau quantique, il nous faut maintenant préciser comment on effectue concrètement une mesure en optique, et déterminer les opérateurs quantiques correspondant à ces mesures réelles²³ (*opérateurs de photodétection*). On aura alors tous les outils en main pour prédire, au niveau quantique, les résultats des différentes mesures (valeurs moyennes, variances, distribution de probabilité...). C'est ce que nous allons faire dans cette partie, en l'illustrant par un exemple classique en optique, celui d'un dispositif interférométrique.

2.4.1 Opérateur de photodétection

a. Photocourant et taux de comptage

Les photodétecteurs dont on dispose à l'heure actuelle (œil, plaque photographique, photodiode, photomultiplicateur, caméra CCD) mesurent tous une *intensité lumineuse*, c'est-à-dire le flux du vecteur de Poynting à travers sa surface moyenné dans le temps. On n'a pas encore de photodétecteur capable de suivre l'oscillation temporelle d'un champ électromagnétique optique dont la période est de l'ordre de la femtoseconde. Un calcul semi-classique (voir par exemple le complément 2C), où la lumière est décrite comme une onde électromagnétique classique, montre que, dans le cas d'un photodétecteur électrique comme une photodiode ou un photomultiplicateur, le signal apparaît sous la forme d'un courant électrique $i(\mathbf{r}, t)$ (« *photocourant* ») donné par :

$$i(\mathbf{r}, t) = s_d \overline{\mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t)} \quad (2.91)$$

le détecteur étant supposé de très petites dimensions et placé en \mathbf{r} , et s_d étant un paramètre dépendant de l'efficacité du détecteur et de sa géométrie. La barre indique une *moyenne temporelle* sur une période du champ²⁴.

²³Contrairement aux particules de masse non nulle comme l'électron, il n'est pas possible de définir de fonction d'onde du photon, qui permettrait d'avoir accès à une « probabilité de présence du photon » (voir CDG 1 p. 190). En l'absence d'une telle grandeur, c'est la probabilité de photodétection qui renseigne sur la « présence » du photon à l'endroit où est situé le photodétecteur, et qui permet de faire le lien entre le vecteur d'état du champ quantifié et les résultats de mesure.

²⁴Dans le cas d'impulsions lumineuses ou pour un champ présentant des battements entre composantes de fréquences différentes, l'amplitude du champ varie sur un temps long comparé à la période optique moyenne d'oscillation du champ. Le photocourant est alors une fonction du temps.

La valeur moyenne temporelle $\overline{\quad}$ est prise en compte automatiquement si on exprime le photocourant $i(\mathbf{r}, t)$ en fonction du champ complexe $\mathbf{E}_\perp^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ associé à $\mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}, t)$ que nous avons introduit au chapitre 1 (Équations 1.79 et 1.80) et dont l'expression en fonction des variables normales est :

$$\mathbf{E}_\perp^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\ell} \mathcal{E}_\ell \vec{\varepsilon}_\ell i \alpha_\ell e^{i(\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = [\mathbf{E}_\perp^{(-)}(\mathbf{r}, t)]^* . \quad (2.92)$$

En utilisant le champ classique complexe, l'expression (2.91) s'écrit

$$i(\mathbf{r}, t) = 2s_d \mathbf{E}_\perp^{(-)}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}_\perp^{(+)}(\mathbf{r}, t) . \quad (2.93)$$

À faible intensité, on peut obtenir à la sortie des photodétecteurs ayant un très faible bruit propre (photomultiplicateurs, photodiodes à avalanche), un autre régime de fonctionnement : on observe des *impulsions brèves de courant* dont la distribution a un aspect aléatoire (et que nous appellerons « clics »), comme ceux qui apparaissent sur un compteur Geiger de particules. Il s'agit d'évènements isolés que l'on peut compter : on est alors en régime appelé *comptage de photons*, dans lequel l'aspect corpusculaire du rayonnement joue un rôle important. Dans ce cas c'est le *taux de comptage moyen* $w(\mathbf{r}, t)$ qui est l'analogie du courant moyen mesuré dans le régime de champ plus intense, et on a donc :

$$w(\mathbf{r}, t) = s \mathbf{E}_\perp^{(-)}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}_\perp^{(+)}(\mathbf{r}, t) \quad (2.94)$$

où $w(\mathbf{r}, t) dt$ est la probabilité de détecter une impulsion entre les instants t et $t + dt$. La quantité s vaut $s = 2s_d/q$, q étant la charge de l'électron. Elle dépend de la taille du détecteur. Pour aller au-delà du calcul de la valeur moyenne du taux de comptage, il faut passer à un modèle quantique de photodétection.

b. Modèle quantique de photodétection

Pour déterminer l'opérateur de photodétection, il faut faire un modèle quantique, plus ou moins idéalisé, du photodétecteur²⁵ : on considère par exemple un atome situé en \mathbf{r} et susceptible de s'ioniser sous l'effet du champ appliqué. Ce processus libère un électron que l'on peut détecter car il est à l'origine d'un processus d'avalanche qui crée un signal macroscopique (le « clic »). Le taux de comptage $w(\mathbf{r}, t)$ est alors donné par la probabilité d'ionisation par unité de temps de l'atome, que l'on peut calculer par la règle d'or de Fermi. On trouve :

$$\implies \quad w(\mathbf{r}, t) = s \langle \psi(t) | \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}) | \psi(t) \rangle = s \left\| \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}) | \psi(t) \right\|^2 \quad (2.95)$$

où s est un nombre caractérisant le détecteur, $|\psi(t)\rangle$ l'état quantique du champ à l'instant t , $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r})$ et $\hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}) = (\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}))^\dagger$ les composantes de fréquence positive et négative de l'opérateur champ électrique introduites dans l'expression (2.29). L'équation (2.95) est l'analogie quantique de l'expression (2.94). Elle peut se généraliser à des types plus compliqués de mesure. Par exemple, on montre de la même manière que le taux $w^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)$

²⁵Voir par exemple CDG 2 Complément A_{II}.

de comptage *simultané* à l'instant t aux points \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 (« double clic » en coïncidence sur deux photodétecteurs situés en \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2) est donné par :

$$w^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = s^2 \langle \psi(t) | \sum_{i,j=x,y,z} \hat{\mathbf{E}}_i^{(-)}(\mathbf{r}_1) \cdot \hat{\mathbf{E}}_j^{(-)}(\mathbf{r}_2) \cdot \hat{\mathbf{E}}_j^{(+)}(\mathbf{r}_2) \cdot \hat{\mathbf{E}}_i^{(+)}(\mathbf{r}_1) | \psi(t) \rangle . \quad (2.96)$$

Plus précisément, $w^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) dt_1 dt_2$ désigne la probabilité d'enregistrer un « clic » en \mathbf{r}_1 entre t et $t + dt_1$ et un « clic » en \mathbf{r}_2 entre t et $t + dt_2$.

2.4.2 Signaux de photodétection pour différents états quantiques du champ

Nous pouvons maintenant utiliser les formules (2.95) et (2.96) pour calculer les résultats d'une mesure de photodétection sur différents états du champ. Pour mieux comprendre les différents aspects de la dualité onde-corpuscule dans le cas de la lumière, nous considérerons successivement le cas de l'état quasi-classique et celui de l'état à un photon.

Un photodétecteur est intrinsèquement un système large bande, capable de détecter des champs électromagnétiques (lumière) dans un domaine étendu de longueurs d'onde. Les états du champ monomode que nous avons considérés dans la partie 2.3 doivent donc d'abord être généralisés au cas multimode. C'est ce que nous allons faire pour l'état quasi-classique et pour l'état à un photon.

a. Mesure sur un état quasi-classique multimode

Un état quasi-classique « multimode » $|\psi_{\text{qc}}(0)\rangle$ est défini comme un produit tensoriel d'états quasi-classique dans chaque mode. Il a pour expression, à l'instant $t = 0$:

$$|\psi_{\text{qc}}(t = 0)\rangle = |\alpha_1\rangle \otimes \dots \otimes |\alpha_\ell\rangle \otimes \dots \quad (2.97a)$$

À l'instant t , cet état devient, d'après l'équation (2.57)

$$|\psi_{\text{qc}}(t)\rangle = |\alpha_1 e^{-i\omega_1 t}\rangle \otimes \dots \otimes |\alpha_\ell e^{-i\omega_\ell t}\rangle \otimes \dots \quad (2.97b)$$

On a alors :

$$\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}) |\psi_{\text{qc}}(t)\rangle = \left(i \sum_{\ell} \mathcal{E}_\ell \alpha_\ell \vec{\varepsilon}_\ell e^{i(\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r} - \omega_\ell t)} \right) |\psi_{\text{qc}}(t)\rangle \quad (2.98)$$

$$= \mathbf{E}_\perp^{(+)}(\mathbf{r}, t) |\psi_{\text{qc}}(t)\rangle \quad (2.99)$$

où $\mathbf{E}_\perp^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ est le champ complexe classique donné par l'expression (2.92). La formule quantique (2.95) du signal de photodétection donne alors :

$$w(\mathbf{r}, t) = s \mathbf{E}_\perp^{(-)}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}_\perp^{(+)}(\mathbf{r}, t) = s |\mathbf{E}_\perp^{(+)}(\mathbf{r}, t)|^2 \quad (2.100a)$$

Elle coïncide exactement avec l'expression classique (2.94). D'autre part, l'expression (2.96) du taux de comptage en coïncidence sur deux photodétecteurs donne le résultat suivant :

$$w^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = s^2 \left\| \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t) \cdot \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) |\psi_{\text{qc}}(t)\rangle \right\|^2 = s^2 |\mathbf{E}_{\perp}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t)|^2 \cdot |\mathbf{E}_{\perp}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t)|^2 \quad (2.100b)$$

Il s'agit simplement du produit $w(\mathbf{r}_1, t)w(\mathbf{r}_2, t)$ des taux de comptage simple, mesurés aux points $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$. C'est aussi ce qu'on aurait obtenu par un calcul classique.

On peut ainsi affirmer de manière générale que *l'optique classique et l'optique quantique conduisent à des prévisions identiques sur les valeurs moyennes des résultats de mesure dans le cas où le champ est dans un état quasi-classique*. Ce résultat généralise au cas multimode les conclusions du paragraphe (2.3.3c).

b. Mesure sur un état à un photon multimode

On appellera état à un photon multimode un état propre associé à la valeur propre 1 de l'opérateur nombre *total* de photons \hat{N} :

$$\hat{N} = \sum_{\ell} \hat{a}_{\ell}^{\dagger} \hat{a}_{\ell} . \quad (2.101)$$

Nous noterons $|1\rangle$ un tel état. Les états nombres « monomodes » $|0, \dots, 0, n_{\ell} = 1, 0, \dots\rangle$ sont évidemment des états à un photon, mais ils ne sont pas les seuls. En particulier, les états « multimodes » de la forme :

$$|1\rangle = \sum_{\ell} c_{\ell} |0, \dots, 0, n_{\ell} = 1, 0, \dots\rangle \quad (2.102a)$$

avec $\sum_{\ell} |c_{\ell}|^2 = 1$, sont manifestement des états à un photon. Notons qu'à la différence des états nombres monomodes, ils ne sont pas des états propres de l'hamiltonien : un état tel que (2.102a) n'est pas stationnaire. Son expression à l'instant t s'écrit (si on repère les énergies par rapport à l'énergie E_v du vide) :

$$|1(t)\rangle = \sum_{\ell} c_{\ell} e^{-i\omega_{\ell} t} |0, \dots, 0, n_{\ell} = 1, 0, \dots\rangle . \quad (2.102b)$$

On trouvera dans le complément 2B une étude plus détaillée des états à un photon, que l'on peut qualifier d'états « quasi-corpulaire », parce qu'ils sont les états quantiques qui ont les propriétés les plus proches de celle d'un corpuscule isolé se propageant à la vitesse de la lumière, de la même manière que l'état-classique est l'état quantique le plus proche d'une onde électromagnétique classique. Mentionnons ici simplement qu'un tel état peut être produit expérimentalement. Il est en particulier l'état final du champ lors du processus d'émission spontanée pour un atome unique porté dans un état excité.

Lorsque le champ est dans un tel état, le taux de comptage simple sur un photodétecteur situé en un point \mathbf{r}_1 , est donné par

$$w(\mathbf{r}_1, t) = s \left\| \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}_1) |1(t)\rangle \right\|^2 = s \left| \sum_{\ell} c_{\ell} \mathcal{E}_{\ell} \vec{\mathcal{E}}_{\ell} e^{i(\mathbf{k}_{\ell} \cdot \mathbf{r}_1 - \omega_{\ell} t)} \right|^2 . \quad (2.103)$$

La valeur précise de $w(\mathbf{r}_1, t)$ dépend donc des coefficients c_ℓ et de la position du détecteur. Rien ne la distingue a priori du résultat obtenu avec un champ classique.

Le taux de comptage en coïncidence sur deux photodétecteurs est donné par (Eq. (2.96)) :

$$s^2 \langle 1(t) | \sum_{i,j=x,y,z} \hat{E}_i^{(-)}(\mathbf{r}_1) \cdot \hat{E}_j^{(-)}(\mathbf{r}_2) \cdot \hat{E}_j^{(+)}(\mathbf{r}_2) \cdot \hat{E}_i^{(+)}(\mathbf{r}_1) | 1(t) \rangle = 0. \quad (2.104)$$

Dans un état à un photon, il est strictement nul, parce qu'on applique *deux fois un opérateur d'annihilation* sur un état ayant au maximum un seul photon. Ce résultat quantique correspond bien à l'idée qu'on se fait d'un état à un photon : il est impossible de détecter simultanément un photon unique sur deux photodétecteurs placés en des points différents. Une telle propriété est inconcevable dans une description classique des champs électromagnétiques, où $w^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)$ est non nul lorsque le champ est non nul sur chacun des détecteurs. C'est une propriété spécifiquement quantique caractéristique des états à un photon (voir Complément 2B).

Remarque

On rencontre parfois l'affirmation qu'une lumière suffisamment faible (dans laquelle l'énergie lumineuse stockée dans une impulsion lumineuse est largement inférieure à $\hbar\omega$, par exemple) est formée de photons individualisés. En fait, un tel état résulte de l'atténuation d'un état « macroscopique » du champ. Il peut s'agir dans le cas monomode d'un état quasi-classique $|\alpha\rangle$ avec $\langle \hat{N} \rangle = |\alpha|^2 \ll 1$. Dans ce cas, la probabilité de double photodétection vaut (Eq. (2.55b)) :

$$w^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = s^2 \mathcal{E}_\ell^4 |\alpha|^4. \quad (2.105)$$

Ce taux de comptage en coïncidence, indépendant du temps, est extrêmement faible, mais non strictement nul : une lumière très fortement atténuée contient donc quelques paires de photons, et *ne décrit donc pas un photon unique comme l'état* (2.102). La différence entre les deux situations peut s'observer expérimentalement sans ambiguïté.

2.4.3 Signaux de photodétection à la sortie d'un interféromètre

Les interférences lumineuses sont une des manifestations les plus claires de l'aspect ondulatoire du rayonnement, et ce paragraphe est consacré à une approche quantique de ce type d'expérience. L'analyse qui va suivre peut s'appliquer à tout état quantique du champ utilisé, mais il sera en particulier intéressant de comparer les cas où on envoie à l'entrée d'un interféromètre un état quasi-classique ou un état à un photon. Nous allons traiter ici le cas de l'interféromètre de Mach-Zehnder, qui comprend deux lames semi-réfléchissantes. Il faut donc commencer par analyser au niveau quantique ce dispositif d'optique classique.

a. Transformation des champs sur une lame semi-réfléchissante

Considérons un faisceau lumineux (1) incident sur une lame semi-réfléchissante, qui se divise sur celle-ci en un faisceau transmis (3) et un faisceau réfléchi (4). Il existe une

deuxième voie d'entrée (2), symétrique de (1) par rapport à la surface de la lame, sur laquelle un deuxième faisceau incident donnerait par réflexion et transmission sur la lame les mêmes faisceaux de sortie (3) et (4) (voir figure 2.6). Pour simplifier, on suppose tous les faisceaux polarisés perpendiculairement au plan de figure, et on considère donc les champs électriques comme des grandeurs scalaires.

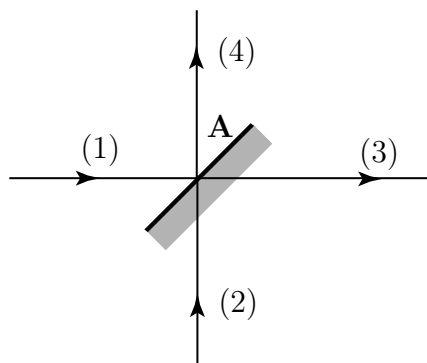


FIG. 2.6: La lame semi-réfléchissante couple au point A les deux champs entrant sur les voies (1) et (2) aux champs transmis sur les voies (3) et (4) (la deuxième face de la lame comporte un traitement anti-réfléchissant).

L'optique classique démontre qu'entre les amplitudes complexes des champs classiques sortants (3) et (4), calculés en A immédiatement après la lame, et les amplitudes complexes des champs classiques entrants (1) et (2), calculés au même point immédiatement avant la lame, existent les relations :

$$E_3^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_1^{(+)} + E_2^{(+)}), \quad (2.106a)$$

$$E_4^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_1^{(+)} - E_2^{(+)}). \quad (2.106b)$$

Le signe moins de la deuxième équation permet d'assurer l'égalité entre la puissance lumineuse incidente sur la lame (proportionnelle à $|E_1^{(+)}|^2 + |E_2^{(+)}|^2$) et la puissance lumineuse sortante²⁶ (proportionnelle à $|E_3^{(+)}|^2 + |E_4^{(+)}|^2$). Le point A de la lame est pris comme origine des coordonnées.

Pour décrire quantiquement l'effet de la lame semi-réfléchissante, il faut écrire au niveau quantique comment s'opère l'interaction entre les champs incidents et les atomes de la lame. On peut ainsi obtenir l'expression du vecteur d'état décrivant le champ après la lame, sous la forme du résultat de l'action d'un opérateur linéaire sur le vecteur d'état décrivant le champ incident. Les résultats de mesure s'obtiennent alors en prenant les

²⁶Les relations (2.106) impliquent un choix particulier pour les phases du champ. De manière plus générale, il suffit d'avoir une transformation linéaire unitaire liant les champs entrants et sortants.

valeurs moyennes des opérateurs des champs se sortie dans l'état transformé. Il s'avère en fait que cette approche est assez lourde et conduit des calculs souvent compliqués²⁷.

Il existe une deuxième méthode, beaucoup plus commode, pour traiter ce problème, et aussi d'autres problèmes similaires de transformation par un système optique. La procédure est la suivante :

- i) On exprime les opérateurs champs dans les modes sortants \hat{E}_3 et \hat{E}_4 en fonction des opérateurs champs dans les modes entrants \hat{E}_1 et \hat{E}_2 ;
- ii) on conserve pour décrire l'état du rayonnement son état dans l'espace entrant ;
- iii) on calcule les résultats de mesure en prenant, dans l'état entrant du rayonnement, les valeurs moyennes, des opérateurs champs sortants exprimés en fonction des opérateurs champs entrants²⁸.

L'intérêt de cette méthode est que *la transformation des opérateurs champs $\hat{E}_i^{(+)}$ invoquée dans la procédure i) est souvent la même que celles des champs classiques correspondants $\hat{E}_i^{(+)}$* . On peut donc immédiatement utiliser les relations connues en optique classique pour traiter le problème correspondant d'optique quantique. C'est en particulier le cas pour la lame semi-réfléchissante. Les équations (2.106) se transposent donc aux opérateurs champs complexes sous la forme :

$$\hat{E}_3^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{E}_1^{(+)} + \hat{E}_2^{(+)} \right) , \quad (2.107a)$$

$$\hat{E}_4^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{E}_1^{(+)} - \hat{E}_2^{(+)} \right) . \quad (2.107b)$$

Même si nous ne les avons pas démontrées, les relations (2.107) sont plausibles, car elles impliquent que les valeurs moyennes des champs quantiques se transforment comme les champs classiques. Elles assurent aussi que les commutateurs des opérateurs de création et d'annihilation des champs sortants, que l'on peut déduire de (2.107) ont bien la valeur (2.20) requise pour tout mode du champ.

b. Calcul des opérateurs champs à la sortie d'un interféromètre

Considérons maintenant un interféromètre de Mach Zehnder, schématisé sur la figure (2.92). Il comporte deux miroirs M et M' et 2 lames semi-réfléchissantes S et S' . Appelons $\ell - \delta\ell/2$ et $\ell + \delta\ell/2$ les longueurs respectives des deux bras $SM S'$ et $SM' S'$, et considérons

²⁷Dans le cas de champs incidents monomodes, cet opérateur, qui s'écrit $\exp[i\pi(\hat{a}_1\hat{a}_2^+ + \hat{a}_2\hat{a}_1^+)/4]$ en fonction des opérateurs d'annihilation et de création agissant dans les modes entrants, est relativement difficile à manipuler.

²⁸Il est possible de démontrer l'équivalence des deux points de vue en remarquant que les expressions d'un même signal obtenues dans les deux approches se déduisent l'une de l'autre par application d'une transformation unitaire, à la fois sur les opérateurs et sur les vecteurs d'état. Cette approche est analogue à *la représentation de Heisenberg* qui permet de décrire l'évolution temporelle en mécanique quantique avec des opérateurs dépendant du temps et des vecteurs d'état indépendants du temps.

pour simplifier le cas de champs monochromatiques et de polarisation fixée. Nous utiliserons les relations (2.107) au niveau de chacune des lames, et la relation suivante pour la propagation libre, déduite de l'expression (2.92a) pour le champ quantique complexe monomode :

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2) = e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)} \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_1) . \quad (2.108)$$

On peut ainsi déterminer les opérateurs champs incidents sur la lame S' , puis les opérateurs champs complexes des deux champs sortants de l'interféromètre $\hat{E}_3^{(+)}$, $\hat{E}_4^{(+)}$. On trouve facilement qu'ils se déduisent de celles des deux champs entrants $\hat{E}_1^{(+)}$, $\hat{E}_2^{(+)}$ par les expressions :

$$\hat{E}_3^{(+)} = e^{ik\ell} \left(\hat{E}_1^{(+)} \cos \frac{k\delta\ell}{2} + i\hat{E}_2^{(+)} \sin \frac{k\delta\ell}{2} \right) , \quad (2.109a)$$

$$\hat{E}_4^{(+)} = e^{ik\ell} \left(i\hat{E}_1^{(+)} \sin \frac{k\delta\ell}{2} + \hat{E}_2^{(+)} \cos \frac{k\delta\ell}{2} \right) . \quad (2.109b)$$

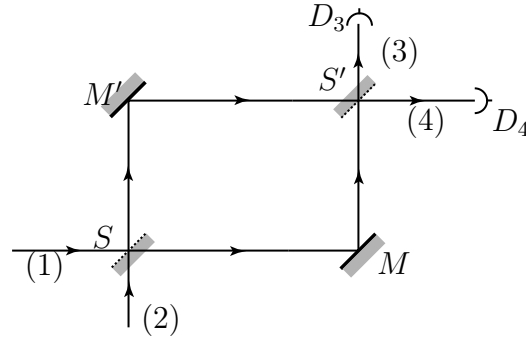


FIG. 2.7: Interféromètre à deux ondes du type Mach-Zehnder. Les signaux de photodétection mesurés par les photodétecteurs D_3 et D_4 dépendent de la différence de chemin optique entre les trajets SMS' et $SM'S'$.

Ces relations permettent de calculer les signaux de photodétection *en sortie* de l'interféromètre si on connaît l'état quantique des *champs entrants*. On note ici encore qu'elles correspondent exactement aux relations entre champs classiques.

c. Signaux de photodétection interférométrique pour différents états du champ entrant.

Considérons tout d'abord le cas où l'état entrant est le produit tensoriel $|1 : \alpha_1(t)\rangle \otimes |2 : 0\rangle$ de l'état quasi-classique $|\alpha_1(t)\rangle$ sur la voie (1) par le vide sur la voie (2). Le signal de photodétection $w_3(t)$ sur la voie de sortie (3) est alors donné par :

$$w_3(t) = s \left\| \hat{E}_3^{(+)} |1 : \alpha_1(t)\rangle \otimes |2 : 0\rangle \right\|^2$$

$$\begin{aligned}
&= s \left\| \left(\hat{E}_1^{(+)} \cos \frac{k\delta\ell}{2} + i\hat{E}_2^{(+)} \sin \frac{k\delta\ell}{2} \right) |1 : \alpha_1(t) \otimes |2 : 0 \rangle \right\|^2 \\
&= s \mathcal{E}_\ell^2 |\alpha_1|^2 \cos^2 \frac{k\delta\ell}{2} = w_1 \cos^2 \frac{k\delta\ell}{2} .
\end{aligned} \tag{2.110a}$$

On a de même pour la voie (4) :

$$w_4(t) = w_1 \sin^2 \frac{k\delta\ell}{2} . \tag{2.110b}$$

On a noté w_1 la probabilité de photodétection (constante) que l'on mesurerait directement sur la voie entrante (1). Ainsi, pour un faisceau entrant dans un état quasi-classique, on retrouve par le calcul quantique les expressions classiques des signaux de sortie, qui varient sinusoidalement en fonction de la différence de marche $\delta\ell$ entre les deux bras de l'interféromètre. Ce résultat corrobore la conclusion que nous avons énoncée à la fin du paragraphe 2.4.2a concernant l'équivalence des approches quantiques et classiques dans le cas des états quasi-classiques.

Considérons maintenant le cas où l'état entrant dans l'interféromètre est de type « corpusculaire ». On le prendra de la forme $|1 : 1\rangle \otimes |2 : 0\rangle$, c'est-à-dire formé du vide dans la voie (2) et d'un état nombre, monomode, à un photon, dans la voie (1). Le signal de photodétection sur la voie (3) est donné dans ce cas par :

$$\begin{aligned}
w_3(t) &= s \left\| \hat{E}_3^{(+)} |1 : 1(t)\rangle \otimes |2 : 0\rangle \right\|^2 = s \left\| e^{-i\omega t} \hat{E}_3^{(+)} |1 : 1\rangle \otimes |2 : 0\rangle \right\|^2 \\
&= s \mathcal{E}_\ell^2 \cos^2 \frac{k\delta\ell}{2} = w_1 \cos^2 \frac{k\delta\ell}{2} .
\end{aligned} \tag{2.111a}$$

Remarquons que $w_3(t)$ ne dépend pas du temps car nous avons pris un état, à un photon monomode et non pas un état de type (2.102). On trouve de même :

$$w_4(t) = s \left\| \hat{E}_4^{(+)} |1 : 1(t)\rangle \otimes |2 : 0\rangle \right\|^2 = w_1 \sin^2 \frac{k\delta\ell}{2} . \tag{2.111b}$$

Cette expression coïncide aussi avec le résultat (D.20) : *l'état à un photon donne exactement le même type d'interférence que l'état quasi-classique* (et que le champ classique) si on considère la *valeur moyenne* du signal de photodétection : l'état « corpusculaire » formé d'un photon unique, dont on sait qu'il ne peut être détecté à deux endroits différents, a aussi des propriétés ondulatoires liées à l'existence de deux chemins possibles de longueur optiques différentes pour ce photon unique. Mais pour l'état à un photon, le résultat a uniquement un caractère probabiliste : on ne peut évidemment avoir qu'une seule photodétection (un « clic ») avec un tel état, et les franges d'interférence ne pourront apparaître que si on répète l'expérience un grand nombre de fois en accumulant les données.

L'équivalence au résultat classique n'est vraie que pour le signal de simple photodétection. Il n'en est pas de même pour les signaux de double photodétection, comme la

détection de coïncidences sur les voies de sortie (3) et (4) de l'interféromètre. Un calcul analogue à celui du paragraphe (2.4.2b) montre que ce signal est nul dans le cas de l'état à un photon, et non nul dans le cas de l'état quasi-classique, aussi peu intense soit-il (voir Complément 2B).

La figure 2.8 donne les résultats d'une expérience d'interférence réalisée avec des états à un photon²⁹. On constate que les franges d'interférence sont invisibles quand le nombre moyen de coups comptés à chaque position des miroirs (c'est-à-dire pour une différence de marche $\delta\ell$ fixée) est inférieure à 1, et qu'elles se construisent progressivement lorsque ce nombre augmente.

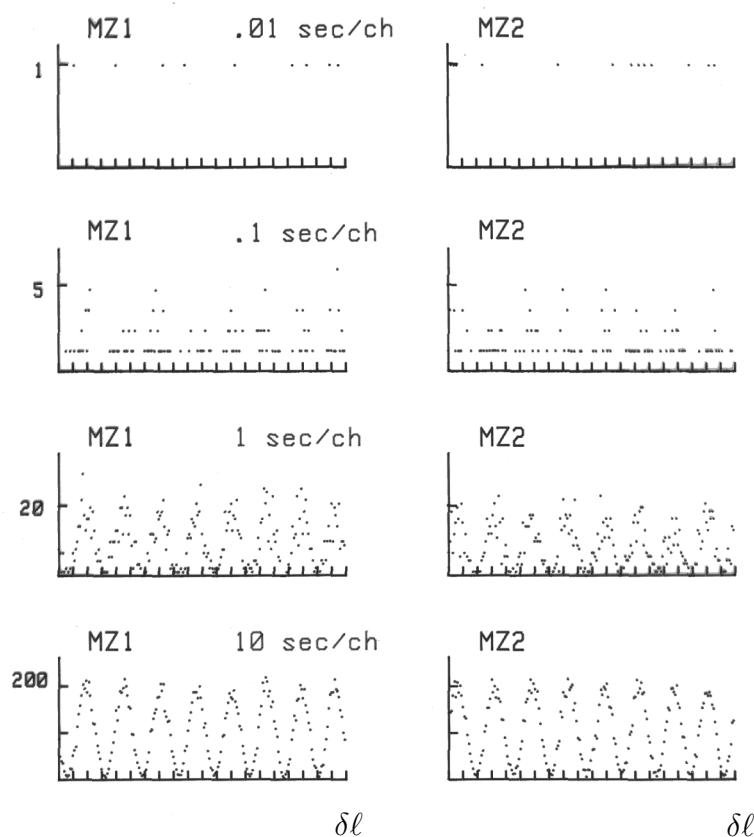


FIG. 2.8: Enregistrement expérimentaux donnant le nombre de coups comptés sur les voies (3) (« Z1 ») et (4) (« Z2 ») d'un interféromètre de Mach Zehnder en fonction de la différence de marche $\delta\ell$, dans le cas où le champ entrant est dans un état à un photon. Les traces successives correspondent à des temps d'observation à différence de marche fixe (canal fixé) variant de 10 ms à 10 s, ce qui correspond à un nombre moyen de détections à chaque position du miroir variant de 0,1 à 100. Noter que les points au niveau zéro correspondent à des résultats de mesure de zéro détection observée.

²⁹A. Aspect, P. Grangier, G. Roger, *Europhysics Letters* **1**, 173 (1986).

2.5 Conclusion : Dualité onde-corpuscule pour la lumière

Deux conceptions contradictoires de la lumière se sont affrontées au cours de l'histoire : la théorie ondulatoire prônée par Huyghens, puis par Young et Fresnel, complètement élucidée enfin par Maxwell ; la conception corpusculaire, défendue par Newton, Laplace, puis, bien plus tard et dans un contexte différent, par Einstein. L'histoire a assisté à des successions de « victoires » temporaires d'un « camp » sur l'autre, en fonction du développement des observations expérimentales et des modèles théoriques. À la fin du XIX^{ème} siècle, l'électromagnétisme classique, dont nous avons donné un aperçu dans le chapitre 1, permettait de décrire de façon ondulatoire la quasi-totalité des phénomènes optiques connus (en y rajoutant le postulat que la grandeur mesurée en optique, appelée intensité lumineuse, est proportionnelle au carré du champ électrique de l'onde de Maxwell moyenné sur un temps long devant la période optique). Au début de ce siècle, il s'avéra que cet édifice impressionnant n'était pas sans failles, et que quelques phénomènes, comme l'effet photoélectrique ou l'effet Compton, n'y recevaient pas d'explication satisfaisante. En inventant le photon, Einstein ressuscita pour l'occasion le modèle corpusculaire, qui expliquait simplement ces deux effets. Mais le prix à payer était considérable, puisque ce modèle était impuissant à rendre compte des phénomènes d'interférence. Il fallait alors admettre que la lumière apparaissait soit comme un corpuscule, soit comme une onde³⁰.

La théorie quantique complète du rayonnement, dont nous avons présenté les rudiments dans ce chapitre, a été élaborée pas à pas entre les années 1920 et 1960, grâce aux contributions de Einstein, Dirac, Heisenberg, Jordan, Pauli, Fermi, Kramers, Bethe, Schwinger, Dyson, Tomonaga, Feynman, Glauber, et d'autres. Son grand triomphe a d'abord été de rendre compte des phénomènes spécifiquement quantiques comme l'émission spontanée, ou le déplacement de Lamb. Mais elle a aussi permis de résoudre la contradiction entre les conceptions opposées : pour la première fois, on dispose d'une *théorie capable de rendre compte de façon unifiée de l'ensemble des phénomènes observés*, qu'ils aient un « aspect » ondulatoire ou un « aspect » corpusculaire : certaines expériences sont plus aisément comprises en ayant recours à des images classiques en termes de corpuscules, d'autres en termes d'ondes, mais toutes sont calculables de manière non ambiguë par la théorie que nous venons de présenter, et dont la forme mathématique reste la même dans tous les cas.

Une conclusion importante à laquelle nous avons abouti est que la théorie semi-classique du rayonnement donne le résultat exact pour la valeur moyenne des résultats de mesure dans le cas où le champ est dans un état quasi-classique. Or il se trouve que *la très grande majorité des sources lumineuses usuelles émettent des états bien modélisés par des états quasi-classiques*³¹. C'est ce qui explique le succès de l'approche « semi-classique »

³⁰Einstein lui-même soulignait ce problème bien avant le développement de la mécanique quantique. Voir par exemple le texte de la conférence donnée en 1909 à Salzburg : A. Einstein, *Physikalische Zeitschrift*, vol X, 817-825, 1909. Traduction française dans : Albert Einstein, *Quanta*, CNRS-Seuil 1989.

³¹Les lasers continus monomodes usuels produisent des états dont les propriétés sont de celles d'un état

présentée dans le cours « Optique Quantique 1 » et utilisée très fréquemment en optique.

La théorie quantique du rayonnement n'est pas seulement une synthèse entre les deux anciennes conceptions, elle contient aussi des effets nouveaux qui ne sont réductibles à aucune d'entre elles. Certains ont été évoqués dans le chapitre et sont décrits dans les compléments. Il s'agit en particulier de propriétés non-classiques des signaux de double photodétection. On les observe aussi sur les fluctuations des signaux de photodétection, qu'on ne peut comprendre qu'en invoquant les fluctuations quantiques du rayonnement, et notamment des fluctuations du vide, qui jouent un rôle fondamental dans l'interprétation de nombreux phénomènes.

Remarque

Pour plus de détails sur les problèmes que nous avons abordés dans ce chapitre, on pourra se reporter aux ouvrages cités dans la bibliographie générale, de niveau plus élevé que l'introduction présentée ici.

quasi-classique monomode, si on néglige les effets de diffusion de phase (voir cours « Optique Quantique 1 »). Les autres sources lumineuses, comme les lampes à incandescence (sources thermiques) ou les tubes fluorescents (lampes à décharge), ainsi que les lasers continus multimodes, produisent des mélanges statistiques d'états quasi-classique.

Complément 2A

Les états comprimés du rayonnement : un aperçu sur la réduction des fluctuations quantiques de la lumière

Nous avons vu dans le paragraphe 2.3.4 qu'en théorie quantique *on ne peut pas déterminer avec une précision infinie la valeur du champ d'une onde électromagnétique*. Il existe en effet une relation d'incertitude de Heisenberg imposant une limite inférieure au produit des variances des deux composantes de quadrature du champ, ou encore au produit des variances de l'intensité et de la phase de ce champ. Cette limite n'a pas uniquement un intérêt théorique : elle est effectivement atteinte dans certaines mesures de grande précision. On observe alors sur le photodétecteur des fluctuations incontrôlables d'origine quantique, appelées *bruit quantique*, qui limitent la précision des mesures. Il est important de bien comprendre les caractéristiques de ce bruit pour pouvoir éventuellement le réduire. En effet, dans la quasi totalité des cas en optique, on ne mesure qu'une seule observable relative au champ, par exemple son intensité et non sa phase. Or il existe des états de la lumière pour lesquels les fluctuations quantiques sont réduites (*comprimées*) sur l'une des observables, au prix évidemment d'une augmentation de bruit sur l'observable conjuguée. On voit l'intérêt de l'utilisation de tels états de la lumière, appelés états comprimés¹, pour augmenter la sensibilité de certaines mesures en optique. Entre l'énoncé de cette idée simple et sa réalisation pratique, il y a un long chemin, que nous allons parcourir rapidement dans les paragraphes suivants. On se reportera aux références données en note² pour une exploration plus approfondie.

¹Ces états sont appelés « squeezed states » en anglais.

²Les Houches session 53, H.J. Kimble, p. 549 et C. Fabre p. 675, J. Dalibard, J.M. Raimond éditeurs, p. (North Holland, Amsterdam 1992), ou bien Proceedings of the XXth Solvay Conférence, H.J. Kimble p. 215 et C. Fabre p. 227, Physics Reports **219** (1992).

2A.1 États comprimés du rayonnement : définition et propriétés

2A.1.1 Définition

Nous considérons dans ce complément un mode unique du champ, comme dans le paragraphe 2.3 du chapitre 2. Introduisons alors un nouvel opérateur \hat{A}_R , paramétré par le nombre réel R et défini par :

$$\hat{A}_R = \hat{a} \cosh R + \hat{a}^+ \sinh R . \quad (2A.1)$$

Il est facile de voir que

$$[\hat{A}_R, \hat{A}_R^+] = \cosh^2 R - \sinh^2 R = 1 . \quad (2A.2)$$

Les nouveaux opérateurs \hat{A}_R, \hat{A}_R^+ que nous venons d'introduire obéissent à la même relation de commutation que les opérateurs d'annihilation et de création \hat{a} et \hat{a}^+ dans le mode considéré. Ils ont donc les mêmes propriétés que ces derniers. On peut en particulier utiliser une procédure identique à celle qui a permis d'introduire les états quasi-classique $|\alpha\rangle$ comme états propres de \hat{a} . On introduit ainsi les états $|\alpha, R\rangle$, états propres de l'opérateur \hat{A}_R :

$$\hat{A}_R |\alpha, R\rangle = \alpha |\alpha, R\rangle . \quad (2A.3)$$

Nous appellerons *états comprimés* de tels états $|\alpha, R\rangle$. Notons qu'on retrouve l'état quasi-classique habituel dans le cas où $R = 0$.

2A.1.2 Valeurs moyennes des différentes observables du champ dans un état comprimé

Nous nous proposons de calculer, à un instant donné $t = 0$ et en tout point de l'espace la valeur moyenne du champ électrique et sa variance dans un tel état comprimé. Utilisons l'expression (2.2.26a) de l'opérateur champ électrique et l'expression suivante de l'opérateur d'annihilation \hat{a} en fonction des opérateurs \hat{A}_R et \hat{A}_R^+ :

$$\hat{a} = \hat{A}_R \cosh R - \hat{A}_R^+ \sinh R . \quad (2A.4)$$

Le champ $\hat{E}_\perp(\mathbf{r})$ peut alors s'exprimer en fonction des opérateurs \hat{A}_R et \hat{A}_R^+ :

$$\hat{E}_\perp(\mathbf{r}) = i\mathcal{E}_\ell \left\{ \hat{A}_R (e^R \cos \mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r} + ie^{-R} \sin \mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r}) - \hat{A}_R^+ (e^R \cos \mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r} - ie^{-R} \sin \mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r}) \right\} . \quad (2A.5)$$

La valeur moyenne de cet opérateur dans l'état comprimé se calcule alors facilement en utilisant (2A.3). On obtient :

$$\begin{aligned} \langle \alpha, R | \hat{E}_\perp(\mathbf{r}) | \alpha, R \rangle &= i\mathfrak{E}_\ell \{ (e^R \cos \mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r} + ie^{-R} \sin \mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r}) \alpha - \text{c.c.} \} \\ &= i\mathfrak{E}_\ell \{ (\alpha \cosh R - \alpha^* \sinh R) e^{i\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r}} - \text{c.c.} \} . \end{aligned} \quad (2A.6a)$$

La valeur moyenne du champ électrique oscille dans l'espace avec une période égale à la longueur d'onde. Si l'on compare (2A.6) et l'expression (2.2.63), rien ne distingue, du point de vue des valeurs moyennes, un état comprimé d'un état quasi-classique $|\alpha'\rangle$ avec :

$$\alpha' = \alpha \cosh R - \alpha^* \sinh R . \quad (2A.6b)$$

Il n'en est pas de même de la variance du champ. En utilisant l'expression (2A.5) et la relation de commutation (2A.2), on obtient en effet :

$$\langle \alpha, R | \hat{E}_\perp^2(\mathbf{r}) | \alpha, R \rangle = \langle (\alpha, R | \hat{E}_\perp(\mathbf{r}) | \alpha, R \rangle)^2 + |\mathfrak{E}_\ell (e^R \cos \mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r} + ie^{-R} \sin \mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r})|^2 . \quad (2A.7)$$

Soit :

$$(\Delta E_\perp(\mathbf{r}))^2 = \mathfrak{E}_\ell^2 (e^{2R} \cos^2 \mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r} + e^{-2R} \sin^2 \mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r}) . \quad (2A.8)$$

On constate donc que lorsque le champ est dans un état comprimé, sa variance dépend de la position \mathbf{r} et qu'elle est alternativement inférieure ou supérieure à la variance des « fluctuations du vide » \mathfrak{E}_ℓ^2 , avec une périodicité égale à la demi longueur d'onde.

Nous avons représenté sur la figure 2A.1 la variation du champ électrique d'un état comprimé à un instant donné en fonction de la position z suivant la direction de propagation, pour différentes valeurs de α et de R : la ligne centrale donne la valeur moyenne calculée par (2A.6) et la section verticale du « ruban » donne la racine carrée de la variance (2A.8) à l'abscisse z . Nous avons aussi donné sur la même figure la représentation de Fresnel correspondante. La figure (2A.1a) correspond à l'état quasi-classique ($R = 0$). Les figures (2A.1b) et (2A.1c) correspondent à α réel et R respectivement négatif et positif (la valeur de α' définie en (2A.6b) étant maintenue constante). La figure (2A.1d) correspond à $\alpha = 0$ et $R < 0$ (vide comprimé). On voit sur (2A.8) que lorsque $k_\ell = \pi/2 + p\pi$ (où p est un entier) pour les figures (2A.1b) et (2A.1d), ou bien lorsque $k_\ell = p\pi$ pour la figure (2A.1c), le champ électrique est défini avec une précision meilleure que dans un état quasi-classique : la variance du champ est divisée par un facteur $e^{2|R|}$, que nous nommerons *facteur de compression*, et qui peut être en principe aussi grand que l'on veut. Le prix à payer pour une telle amélioration est que, un quart de longueur d'onde plus loin, l'incertitude sur le champ est cette fois-ci multipliée par le même facteur.

Il est d'autre part facile de montrer, à partir de l'équation (2A.4) que les variances des opérateurs de quadrature du champ, \hat{E}_P et \hat{E}_Q introduits en (2.2.74) ont une expression très simple pour un état comprimé $|\alpha, R\rangle$ à l'instant $t = 0$:

$$\begin{aligned} (\Delta E_P)^2 &= \mathfrak{E}_\ell^2 e^{-2R} , \\ (\Delta E_Q)^2 &= \mathfrak{E}_\ell^2 e^{2R} . \end{aligned} \quad (2A.9)$$

On en déduit que :

$$\Delta E_P \Delta E_Q = \mathfrak{E}_\ell^2 . \quad (2A.10)$$

Les états comprimés sont donc, tout comme les états quasi-classiques, des *états minimaux* vis-à-vis de l'inégalité de Heisenberg (2.2.77).

Calculons pour finir la valeur moyenne et la variance du nombre de photons $\hat{N} = \hat{a}^+ \hat{a}$ dans un état comprimé. \hat{N} s'exprime en fonction des opérateurs \hat{A}_R et \hat{A}_R^+ sous la forme :

$$\hat{N} = \hat{A}_R^+ \hat{A}_R \cosh^2 R + \hat{A}_R \hat{A}_R^+ \sinh^2 R - \sinh R \cosh R (\hat{A}_R^2 + \hat{A}_R^{+2}) . \quad (2A.11)$$

Le nombre moyen de photons dans l'état $|\alpha, R\rangle$ se calcule facilement à l'aide de (2A.11). On trouve :

$$\langle \hat{N} \rangle = \langle \alpha, R | \hat{N} | \alpha, R \rangle = |\alpha'|^2 + \sinh^2 R , \quad (2A.12a)$$

où α' est donné par (2A.6b). Cette relation montre que même dans un état comprimé pour lequel $\alpha = \alpha' = 0$ (appelé « vide comprimé »), le nombre de photons n'est pas nul dès que $R \neq 0$.

Pour calculer la variance de \hat{N} , nous nous restreindrons au cas simple où α est réel. Un calcul fastidieux, mais sans difficulté, utilisant le commutateur (2A.2) et les relations (2A.3), conduit au résultat suivant :

$$(\Delta N)^2 = \alpha^2 e^{-4R} + 2 \sinh^2 R \cosh^2 R = \alpha'^2 e^{-2R} + 2 \sinh^2 R \cosh^2 R . \quad (2A.12b)$$

Considérons la situation où R est positif (cas de la figure 2A.1c) et où α' est très grand ($\alpha \gg e^{-3R}$). Les seconds termes de (2A.12a) et (2A.12b) sont alors négligeables, et la variance de \hat{N} est peu différente de $\langle \hat{N} \rangle e^{-2R}$: l'incertitude sur la mesure de l'intensité de l'onde est réduite par rapport au cas du champ quasi-classique par le facteur de compression e^{-2R} . C'est ce que l'on constate sur la représentation de Fresnel de la figure (2A.1c), où les fluctuations sur l'amplitude du vecteur de Fresnel sont réduites par rapport à celles de l'état quasi-classique (« état comprimé en amplitude »). On a affaire à un état de la lumière qualifié aussi de *sub-Poissonien*, car sa variance est inférieure à celle d'une distribution de Poisson, pour laquelle $(\Delta N)^2 = \langle \hat{N} \rangle$. La mesure de la quantité conjuguée, en l'occurrence la phase de l'onde, associée à la mesure du point de l'espace où le champ électrique s'annule, est moins précise dans ce cas, comme on peut le constater intuitivement sur le diagramme de Fresnel de la figure (2A.1c). Ces conclusions sont évidemment inversées dans le cas où R est négatif, où l'on obtient des « états comprimés en phase » (figure 2A.1b).

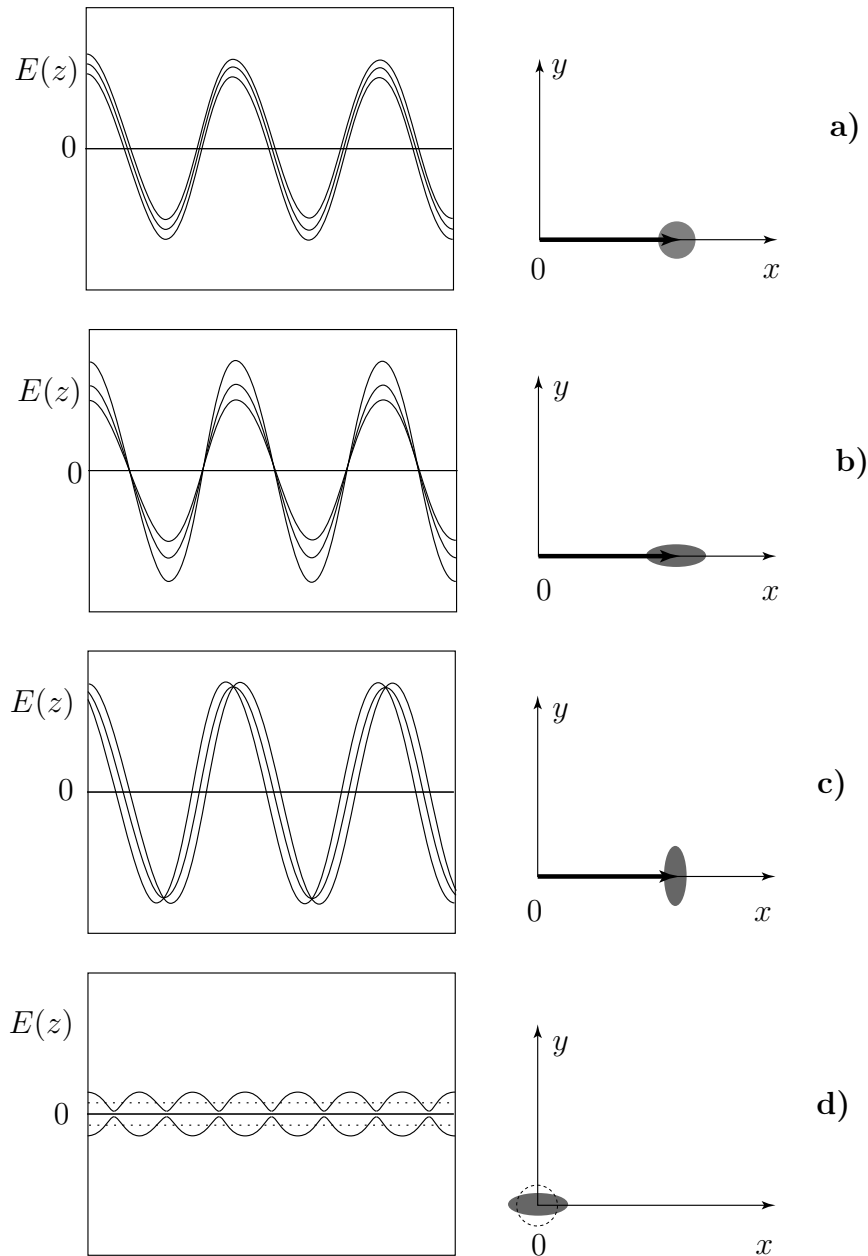


FIG. 2A.1: Allure de la dépendance spatiale du champ électrique et représentation de Fresnel pour différents états du champ : a) État quasi-classique ($R = 0$), caractérisé par un ruban de hauteur $2\mathcal{E}_\ell$ et une zone d'incertitude circulaire dans le plan de Fresnel ; b) État comprimé avec $R < 0$, caractérisé par un champ présentant une incertitude plus faible aux points où il est proche de 0, et une zone d'incertitude allongée le long du champ moyen ; c) État comprimé avec $R > 0$ caractérisé par un champ présentant une incertitude plus faible aux points où il est maximal, et une zone d'incertitude allongée perpendiculairement au champ moyen ; d) « vide comprimé ». Le vide « ordinaire » est représenté sur la figure (2A.1d) par le ruban en pointillés de hauteur constante égale à $2\mathcal{E}_\ell$, et dans le plan de Fresnel par le disque pointillé.

On pourrait faire ici le calcul de la dépendance temporelle des valeurs moyennes en généralisant l'approche du paragraphe (2.3.3). Il est facile de voir que l'on obtient alors des expressions analogues à (2A.6) et (2A.8) dans lesquelles on a remplacé la phase $\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r}$ par $\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r} - \omega_\ell t$. La discussion de la dépendance des valeurs moyennes en fonction de la distance que nous venons d'exposer peut donc se transcrire dans le domaine temporel : la variance du champ en un point donné est alternativement inférieure et supérieure aux fluctuations du vide, le phénomène se reproduisant toutes les demi-périodes. La dépendance temporelle du champ dans un tel cas (cas α réel, $R < 0$) correspond donc bien à la figure (2.5) du chapitre 2, analogue à la figure (2A.1b). La figure 2A.1 représente donc aussi bien la dépendance spatiale du champ à un instant donné que sa dépendance temporelle en un point donné.

Remarque

Lorsque le paramètre R augmente, le deuxième terme dans (2A.12a) et (2A.12b) finit par devenir prédominant, et la variance du nombre de photons devient alors largement « super-Poissonienne ». Dans cette situation, l'ellipse qui décrit la variance du champ sur la figure (2A.1c) s'écarte de plus en plus d'un cercle correspondant à une amplitude constante. On peut aussi définir des « états comprimés en intensité » dont la zone en grisé est distordue et se trouve constamment au voisinage du cercle centré sur l'origine. De tels états ont pour limite l'état nombre (voir figure 2.2.4) pour lequel il y a incertitude totale sur la phase et certitude totale sur l'intensité.

2A.1.3 Opérateur de compression

Un état comprimé se déduit d'un état quasi-classique par une transformation unitaire, dite *transformation de compression* :

$$|\alpha, R\rangle = \hat{S}(R)|\alpha\rangle \quad (2A.13)$$

avec

$$\hat{S}(R) = \exp(R(\hat{a}^2 - \hat{a}^{+2})/2) . \quad (2A.14)$$

Pour démontrer la relation (2A.13) nous utilisons l'identité suivante³, valable quels que soient les opérateurs \hat{A} et \hat{B} :

$$e^{\hat{B}} \hat{A} e^{-\hat{B}} = \hat{A} + \frac{1}{1!} [\hat{B}, \hat{A}] + \frac{1}{2!} [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]] + \frac{1}{3!} [\hat{B}, [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]]] + \dots \quad (2A.15)$$

Plaçons-nous dans le cas où $\hat{B} = R(\hat{a}^2 - \hat{a}^{+2})/2$ et $\hat{A} = \hat{a}$. Les commutateurs $[\hat{B}, \hat{a}]$ et $[\hat{B}, \hat{a}^+]$ ont pour expression :

$$\begin{aligned} [\hat{B}, \hat{a}] &= R \hat{a}^+ , \\ [\hat{B}, \hat{a}^+] &= R \hat{a} . \end{aligned} \quad (2A.16)$$

³Voir par exemple W. Louisell, « Quantum statistical properties of radiation », p.136 (Wiley, 1973).

On en déduit :

$$\begin{aligned}\hat{S}(R)\hat{a}\hat{S}^{-1} &= \hat{a} \left(1 + \frac{R^2}{2!} \dots \right) + \hat{a}^+ \left(R + \frac{R^3}{3!} \right) \\ &= \hat{a} \cosh R + \hat{a}^+ \sinh R = \hat{A}_R.\end{aligned}\quad (2A.17)$$

En appliquant les deux membres de cette égalité au vecteur $\hat{S}(R)|\alpha\rangle$, on obtient :

$$\hat{S}(R)\alpha|\alpha\rangle = \hat{A}_R\hat{S}(R)|\alpha\rangle. \quad (2A.18)$$

Cette relation montre que le vecteur $\hat{S}(R)|\alpha\rangle$ est vecteur propre de \hat{A}_R avec la valeur propre α et satisfait donc à la définition (2A.3) d'un état comprimé $|\alpha, R\rangle$.

2A.1.4 Passage d'un état comprimé au travers d'une lame partiellement réfléchissante

Considérons maintenant l'effet d'une lame partiellement réfléchissante de coefficients de transmission et de réflexion en amplitude respectivement égaux à t et r , avec $r^2 + t^2 = 1$ (figure 2A.2). Soit A le point de la lame où les faisceaux se séparent.

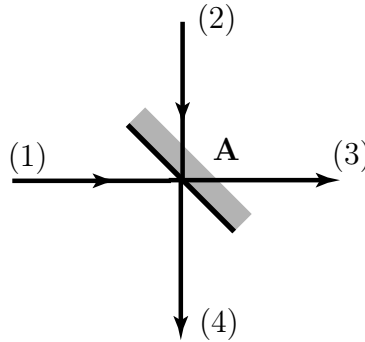


FIG. 2A.2: La lame partiellement réfléchissante couple les deux champs entrant sur les voies (1) et (2) au champ transmis sur la voie (3).

Nous allons utiliser la méthode exposée dans le paragraphe 2.4.3a. Soient $E_1^{(+)}$ et $E_2^{(+)}$ les amplitudes complexes des champs classiques entrant par les deux voies d'entrée (1) et (2) de la lame. Le champ transmis $E_3^{(+)}$ est donné par la formule classique

$$E_3^{(+)} = t E_1^{(+)} + r E_2^{(+)}, \quad (2A.19)$$

les trois champs étant évalués au point A . On obtient les relations entre les opérateurs quantiques correspondants en remplaçant les champs classiques complexes $E_i^{(+)}$ par les opérateurs $\hat{E}_i^{(+)}$ dans l'équation (2A.19) :

$$\hat{E}_3^{(+)} = t \hat{E}_1^{(+)} + r \hat{E}_2^{(+)}. \quad (2A.20a)$$

Cette relation permet de faire des calculs sur le champ transmis connaissant l'état du champ dans les modes entrants (1) et (2). Restreignons-nous au cas d'un mode unique de fréquence ω . Dans ce cas les opérateurs champs complexes $\hat{E}_i^{(+)}$ sont simplement proportionnels aux opérateurs d'annihilation \hat{a}_i , avec une même constante de proportionnalité. On a donc

$$\hat{a}_3 = t \hat{a}_1 + r \hat{a}_2 . \quad (2A.20b)$$

On déduit de (2A.20b) l'expression de l'opérateur nombre de photons du champ transmis :

$$\hat{N}_3 = \hat{a}_3^+ \hat{a}_3 = t^2 \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + r t (\hat{a}_1^+ \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^+) + r^2 \hat{a}_2^+ \hat{a}_2 . \quad (2A.21)$$

Envoyons alors par la voie (1) de la lame un état comprimé $|\alpha, R\rangle$, que nous supposerons de type « sub-Poissonien » (α et R réels positifs), et déterminons les fluctuations d'intensité du champ transmis. L'état initial $|\Psi\rangle$ du problème est donc le produit tensoriel de l'état comprimé dans le mode correspondant à la voie (1) et du vide dans le mode entrant par la voie (2) :

$$|\Psi\rangle = |\alpha, R\rangle \otimes |0\rangle . \quad (2A.22a)$$

L'action de l'opérateur nombre de photons sur cet état initial est alors égal à :

$$\hat{N}_3 |\Psi\rangle = t^2 \hat{N}_1 |\alpha, R\rangle \otimes |0\rangle + r t \hat{a}_1 |\alpha, R\rangle \otimes |1\rangle \quad (2A.22b)$$

puisque $\hat{a}_2 |0\rangle = 0$. Cette relation nous permet de calculer la valeur moyenne $\langle \hat{N}_3 \rangle$ de \hat{N}_3 ainsi que sa variance. On trouve ainsi

$$\langle \Psi | \hat{N}_3 | \Psi \rangle = t^2 \langle \alpha, R | \hat{N}_1 | \alpha, R \rangle , \quad (2A.23)$$

ce qui n'est rien d'autre que le résultat classique : le nombre moyen de photons transmis est égal au nombre moyen de photons incidents multiplié par le coefficient de transmission en intensité, t^2 . D'autre part, on trouve que la variance $(\Delta N_3)^2 = \|\hat{N}_3 |\Psi\rangle\|^2 - (\langle \Psi | \hat{N}_3 | \Psi \rangle)^2$ vaut :

$$\begin{aligned} (\Delta N_3)^2 &= t^4 (\langle \alpha, R | \hat{N}_1^2 | \alpha, R \rangle - (\langle \alpha, R | \hat{N}_1 | \alpha, R \rangle)^2) + r^2 t^2 \|\hat{a}_1 |\alpha, R\rangle\|^2 \\ &= t^4 (\Delta N_1)^2 + r^2 t^2 \langle \alpha, R | \hat{N}_1 | \alpha, R \rangle , \end{aligned} \quad (2A.24)$$

d'où l'on tire finalement :

$$\frac{(\Delta N_3)^2}{\langle \hat{N}_3 \rangle} = t^2 \frac{(\Delta N_1)^2}{\langle \hat{N}_1 \rangle} + r^2 . \quad (2A.25)$$

Lorsque la lame a un coefficient de transmission proche de 1, alors $r = 0$, et les fluctuations transmises sont peu différentes des fluctuations incidentes. Elles restent donc sub-Poissoniennes $((\Delta N_3)^2 / \langle \hat{N}_3 \rangle < 1)$. En revanche, si t est petit, r est proche de 1, et les fluctuations de sortie sont principalement dues au deuxième terme de (2A.25), c'est-à-dire aux fluctuations du vide entrant par la voie inoccupée de la lame. Elles sont égales à celles d'un état quasi-classique $((\Delta N_3)^2 / \langle \hat{N}_3 \rangle = 1)$, et cela même si le champ incident est très

fortement sub-Poissonien. Une manière imagée de rendre compte de ce phénomène est de dire que la lame a pour effet d'introduire dans le mode initial les fluctuations du vide qui entrent par la voie d'entrée « inoccupée » de la lame⁴. Remarquons enfin que si le faisceau entrant sur la voie (1) est Poissonien ($(\Delta N_1)^2 / \langle \hat{N}_1 \rangle = 1$), la formule (2A.25) montre que le champ transmis est lui aussi Poissonien, et cela quelle que soit la valeur du coefficient de transmission r .

2A.1.5 Modification des fluctuations sous l'effet de pertes

Vu du faisceau transmis, le coefficient r^2 représente une *perte* sur le faisceau incident. Par un raisonnement analogue à celui du paragraphe précédent, on peut généraliser la formule (2A.25) dans le cas de la traversée successive de plusieurs lames : il suffit de remplacer r^2 dans (2A.25) par la somme des coefficients de réflexion en intensité des lames successives. Plus généralement, une perte globale de lumière dans laquelle le faisceau transmis est proportionnel au faisceau incident (« perte linéaire ») peut toujours être considérée comme la déviation d'une partie du faisceau incident vers un ensemble d'autres modes « non utiles ». La formule (2A.25) s'applique, en remplaçant r^2 par le coefficient de pertes en intensité A et t^2 par $1 - A$. De ce point de vue, une *absorption* a le même effet qu'une *réflexion partielle*.

Toute perte linéaire a donc pour effet de réduire la compression initiale des fluctuations (mais aussi de réduire tout excès de bruit initial) et de faire tendre l'état du champ vers un état quasi-classique, qui apparaît alors dans une certaine mesure comme le seul état stable du rayonnement vis-à-vis des pertes. La formule (2A.25) montre en outre qu'il suffit de pertes peu importantes pour détruire l'effet de compression des fluctuations. C'est la raison pour laquelle il faut prendre de grandes précautions et réduire les pertes au maximum pour ne pas détruire une compression des fluctuations chèrement acquise dans un dispositif non-linéaire.

Remarque

On peut donner une autre interprétation, en termes de photons, du fait qu'une perte a toujours tendance à augmenter le caractère Poissonien d'un état, si l'on se souvient que la distribution de Poisson peut être associée à un ensemble de photons statistiquement indépendants. Un état sub-Poissonien correspond alors à des photons distribués non plus au hasard, mais arrivant de façon régulière. L'effet d'une perte est de prélever aléatoirement des photons dans cette distribution régulière. Elle crée donc sur le faisceau transmis une distribution de photons plus aléatoire que la distribution incidente, donc plus proche de la distribution de Poisson⁵.

⁴Cette propriété n'est pas propre aux mesures concernant le bruit d'intensité de l'onde transmise. On peut montrer qu'elle est valable aussi pour la mesure d'autres observables, comme celles des composantes de quadrature du champ.

⁵Voir par exemple S. Reynaud, *Annales de Physique*, **15**, 63 (1990).

2A.2 Production d'états comprimés

Les sources lumineuses usuelles produisent des états de la lumière ayant des bruits d'intensité et de phase qui sont tous les deux supérieurs – ou au mieux égal – au bruit de l'état quasi-classique. Pour produire des états comprimés il faut faire appel à de délicates expériences d'optique non-linéaire. Ce type nouveau d'états du rayonnement, qui répétons-le, ne peut pas être décrit en termes de champs classiques, n'a été mis en évidence pour la première fois que dans les années 1980⁶. Différentes expériences⁷ ont produit depuis des états comprimés correspondant à des facteurs de compression pouvant aller jusqu'à 10.

2A.2.1 Génération par processus paramétrique

Considérons les relations (2A.13) et (2A.14). On peut les mettre sous la forme :

$$|\alpha, R\rangle = \exp(-i\hat{H}_1 T/\hbar)|\alpha\rangle \quad (2A.26)$$

avec :

$$\hat{H}_1 = i\frac{\hbar R}{2T}(\hat{a}^{+2} - \hat{a}^2) \quad (2A.27)$$

L'équation (2A.26) montre qu'un état comprimé résulte de l'évolution d'un état quasi-classique pendant un intervalle de temps T sous l'effet de l'hamiltonien \hat{H}_1 . La forme (2A.27) de \hat{H}_1 est caractéristique de processus physiques dans lesquels il y a *création (ou destruction) simultanée de deux photons du mode considéré*. On rencontre ce type de terme d'interaction en optique non-linéaire, par exemple dans le cas du *mélange paramétrique dégénéré* (voir complément 5.4) dans lequel la destruction d'un photon pompe à la fréquence 2ω s'accompagne de la création simultanée de 2 photons à la fréquence ω .

La figure (2A.2.1) donne le principe d'un générateur d'état comprimés : il comporte un milieu non-linéaire paramétrique, inséré dans une cavité optique Fabry-Perot formée de 2 miroirs M et M' pour la fréquence 2ω . Le miroir M est totalement réfléchissant pour la fréquence ω , et M' n'en transmet qu'une faible partie. La cavité est résonnante à la fréquence ω et permet de sélectionner le mélange paramétrique dégénéré ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$), car les autres modes créés par mélange paramétrique, de fréquence ω_1 et ω_2 (avec $\omega_1 + \omega_2 = 2\omega, \omega_1 \neq \omega_2$) ne sont pas résonnants avec la cavité Fabry-Perot. Le système est pompé par un laser (L) à la fréquence 2ω . L'état initial du mode de fréquence ω avant le début du pompage est le vide. Au-dessous du seuil d'oscillation de l'oscillateur paramétrique (voir complément 5.4), cet état se transforme au cours du temps sous l'effet du pompage paramétrique décrit par un hamiltonien de type (2A.27) en un *vide comprimé*. À cause de la transmission du miroir M' , un régime stationnaire s'établit, donnant naissance en sortie de cavité à un champ du type de la figure (2A.1d).

⁶R. Slusher, L. Hollberg, B. Yurke, J. Mertz, J.F. Valley, Phys. Rev. Letters **55**, 2409 (1985).

⁷Pour une revue de différentes méthodes expérimentales utilisées pour produire des états comprimés, voir par exemple le numéro spécial Applied Physics B, **55** (septembre 1992).

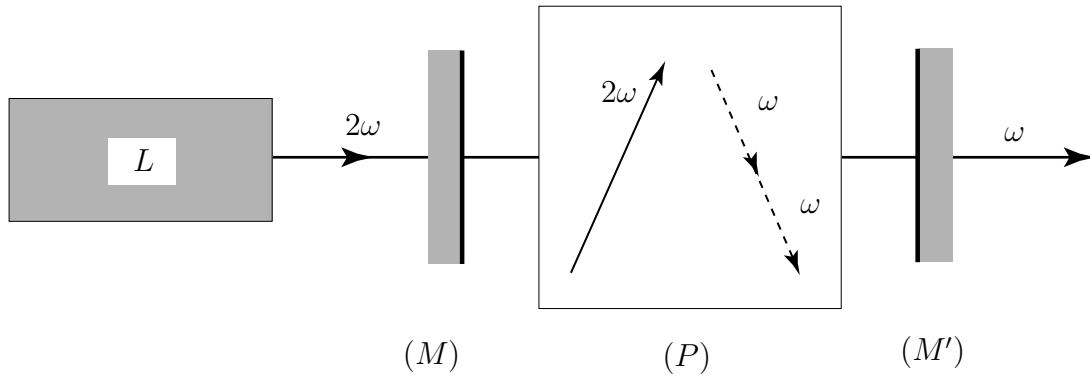


FIG. 2A.3: Schéma d'une expérience de production d'état comprimé par mélange paramétrique dégénéré.

2A.2.2 Autres méthodes de production d'états comprimés

De nombreux processus d'optique non linéaire sont susceptibles de produire des états comprimés, dans des conditions bien définies de valeurs des paramètres, et en prenant toujours soin d'éliminer toute perte susceptible de dégrader la compression des fluctuations produite par l'interaction non linéaire. Citons en particulier le *doublage de fréquence*, décrit lui aussi par l'hamiltonien (2A.27), qui peut produire un état comprimé de valeur moyenne non nulle aussi bien sur le faisceau pompe résiduel transmis par le milieu non linéaire que sur le second harmonique produit. Les milieux présentant une *non-linéarité Kerr* (voir chapitre 5) sont susceptibles eux aussi de produire des états comprimés du rayonnement par simple propagation d'un état quasi-classique dans le milieu non-linéaire. À la différence des effets paramétriques, il n'est pas nécessaire dans ce cas d'utiliser un faisceau de pompage à une fréquence différente. L'indice non linéaire de la silice est en particulier suffisant pour qu'un champ initialement quasi-classique se propageant dans une fibre monomode de quelques mètres de long en ressorte dans un état comprimé.

Enfin il faut remarquer qu'un *laser* est susceptible d'émettre un champ sub-Poissonien. En effet, nous avons vu dans le cours d'Optique Quantique 1 que dans un laser, le bruit sur la phase φ du champ laser, dû à la diffusion de phase Schawlow-Townes, était intrinsèquement très grand. En effet rien dans le fonctionnement du laser ne verrouille la valeur de la phase, qui est donc libre d'effectuer une diffusion non bornée sous l'effet de l'émission spontanée. En raison de la grande valeur de la variance $\Delta\varphi$ de la phase, la relation de Heisenberg (2.2.82), que l'on peut écrire :

$$\Delta N \geq \frac{1}{2\Delta\varphi} \quad (2A.28)$$

n'empêche donc pas que le champ issu du laser soit très fortement sub-Poissonien. Ce n'est qu'à cause de l'effet des pertes mentionnées dans le paragraphe précédent et du bruit introduit par le processus engendrant l'inversion de population (bruit de pompage) que les lasers usuels produisent des champs à statistique Poissonnienne. Un laser à semi-conducteur

alimenté par un courant électrique dont les fluctuations sont fortement réduites⁸ produit ainsi un champ comprimé en intensité (dans certaines conditions expérimentales, on peut obtenir un facteur de compression de l'ordre de 10). La simplicité de principe de ce type de dispositif permet d'envisager que la compression des fluctuations du rayonnement quitte les laboratoires de recherche pour être utilisée dans des applications pratiques, si la technologie est en mesure de produire les composants nécessaires.

2A.3 Applications des états comprimés

En optique, on n'est généralement intéressé que par la mesure d'une seule grandeur relative au champ, qui est souvent une intensité. L'utilisation judicieuse d'états comprimés permet d'obtenir sur la grandeur mesurée un bruit inférieur à la limite valable pour un faisceau lumineux quasi-classique de même intensité moyenne (le bruit correspondant est appelé « bruit de grenaille », ou « shot noise » en anglais). Nous allons donner ici deux exemples d'amélioration possible de la précision de mesures optiques.

2A.3.1 Mesures de faibles absorptions

Considérons une mesure directe d'absorption : un faisceau lumineux d'intensité moyenne $\langle \hat{N}_1 \rangle$ est envoyé à travers un milieu faiblement absorbant, de coefficient d'absorption $A \ll 1$, puis détecté. Le signal, constitué par la différence entre l'intensité $\langle \hat{N}_1 \rangle$ mesurée en l'absence d'absorbant, et l'intensité $\langle \hat{N}_3 \rangle = (1 - A)\langle \hat{N}_1 \rangle$ mesurée en présence d'absorbant, vaut donc $\langle \hat{N}_1 - \hat{N}_3 \rangle = A\langle \hat{N}_1 \rangle$. Le bruit en l'absence de signal vaut ΔN_1 . La valeur minimale détectable de l'absorption A_{\min} correspond à un signal commençant à « émerger » du bruit environnant, c'est-à-dire à un rapport signal sur bruit égal à 1. Elle vaut :

$$A_{\min} = \frac{\Delta N_1}{\langle \hat{N}_1 \rangle}. \quad (2A.29)$$

Dans le cas d'un champ quasi-classique, elle est égale à $\sqrt{1/\langle \hat{N}_1 \rangle}$. Pour augmenter la sensibilité de la mesure, il faut :

- soit augmenter le nombre moyen de photons détectés $\langle \hat{N}_1 \rangle$, c'est-à-dire augmenter l'intensité du faisceau lumineux ou le temps de mesure, ce qui n'est pas toujours possible.
- soit utiliser un champ comprimé sub-Poissonien, qui réduit $\Delta N_1/\langle \hat{N}_1 \rangle$ donc A_{\min} d'un facteur e^R .

⁸Voir par exemple Y. Yamamoto, S. Machida, Phys. Rev. Letters **60**, 792 (1988), et Y. Yamamoto, S. Machida, O. Nilsson « Squeezed state generation by semiconductor lasers », in Coherence, Amplification and Quantum effects in semiconductor lasers », Chapitre 11, (Wiley, 1991).

Dans le cas idéal d'un champ parfaitement stabilisé en intensité, décrit par un état nombre (voir paragraphe 2.3.2), la valeur théorique de A_{\min} correspondrait à la détection de la *disparition d'un seul photon* dans le mode, et vaudrait donc $1/\langle\hat{N}_1\rangle$.

Par exemple, un faisceau lumineux de longueur d'onde $1\mu\text{m}$ et de puissance 1 mW, correspond à un courant de photon d'environ 5×10^{15} photons par seconde. S'il est dans un état quasi-classique, l'absorption minimale détectable sur un tel faisceau en 1ms par exemple sera d'après (2A.29) $A_{\min} \equiv 4 \times 10^{-7}$. S'il est dans un état nombre, elle sera beaucoup plus faible, de l'ordre de 2×10^{-13} .

2A.3.2 Mesure interférométrique

Ce type de mesure compte parmi les mesures optiques les plus sensibles. À titre d'exemple, mentionnons les détecteurs optiques d'ondes gravitationnelles, constitués par des interféromètres de Michelson dont les bras ont environ 3 km de long, et destinés à détecter les ondes gravitationnelles produites par les supernovae⁹. L'effet attendu est extraordinairement ténu : la différence de marche calculée provoquée par le passage de l'onde est de l'ordre de 10^{-18}m ! C'est d'ailleurs l'étude approfondie de ce type de dispositif qui a stimulé à l'origine les études sur les états comprimés.

Considérons donc un interféromètre, comme celui de la figure 2.2.7 du chapitre 2, dans lequel on injecte par la voie (1) un faisceau lumineux intense et monochromatique de fréquence ω_ℓ . On a pu montrer¹⁰ que le déphasage minimal mesurable $\Delta\varphi_{\min}$ entre les deux bras de l'interféromètre, qui correspond à un rapport signal sur bruit égal à 1, vaut :

$$\Delta\varphi_{\min} = \frac{1}{\sqrt{\langle\hat{N}_1\rangle}} \frac{\Delta E_{2P}}{\mathcal{E}_\ell} \quad (2A.30)$$

où ΔE_{2P} représente la variance de la composante de quadrature du *champ entrant par la voie (2)* en phase avec le champ entrant par la voie (1). Cette grandeur ne dépend donc pas des fluctuations du champ que l'on injecte dans la voie (1) de l'interféromètre. Habituellement, on n'injecte rien par la voie (2), et ΔE_{2P} n'est autre que l'amplitude des fluctuations du vide, c'est-à-dire \mathcal{E}_ℓ . On trouve alors que $\Delta\varphi_{\min}$ vaut $1/\sqrt{\langle\hat{N}_1\rangle}$, expression identique à celle de l'absorption minimale pour un champ quasi-classique. Pour atteindre la sensibilité nécessaire pour la détection d'ondes gravitationnelles avec un temps de mesure de 1 ms, la puissance requise pour le laser injecté par la voie (1) est de l'ordre de 100 kW.

Il est toutefois possible d'augmenter la sensibilité au-delà de cette limite en injectant par la deuxième voie d'entrée de l'interféromètre un *vide comprimé*. Les formules (2A.9) et (2A.30) montrent qu'on gagne ainsi, ici aussi, un facteur $e^{|R|}$ sur la sensibilité de l'interféromètre. Expérimentalement, ce facteur est de l'ordre de 2 à 5. Le gain en sensibilité peut alors paraître dérisoire, vu les difficultés expérimentales rencontrées dans la production de

⁹C.N. Man, dans « Les lasers et leurs applications scientifiques et médicales », p.219. Les Éditions de Physique (Paris 1996).

¹⁰C.M. Caves, Phys. Rev. D, **23**, 1693 (1981).

vide comprimé. Mais, considérant le fait que le nombre de supernovae détectables attendu est de l'ordre de 1 par mois, augmenter le nombre d'évènements détectables même par un aussi faible facteur – élevé au cube!– serait le bienvenu !

Complément 2B

États à un photon

Nous nous proposons dans ce complément de préciser quelques caractéristiques des états à un photon, qui ont été introduits dans le paragraphe 2.4.2 du chapitre 2. Ces états présentent un certain nombre de propriétés notablement différentes de celles d'un faisceau de lumière classique, même très atténuée. On n'a su les produire que vers le début des années 1980. Ils permettent de mettre en évidence de façon frappante le comportement typiquement quantique de la lumière.

2B.1 Paquet d'onde à un photon. Évolution spatio-temporelle

Rappelons qu'on appelle état à un photon un état propre du nombre total de photons $\hat{N} = \sum_{\ell} \hat{a}_{\ell}^{\dagger} \hat{a}_{\ell}$ de valeur propre 1. Si l'on note $|1\rangle$ un tel état, on peut le prendre de la forme :

$$|1\rangle = \sum_{\ell} c_{\ell} |0, \dots, n_{\ell} = 1, 0, \dots\rangle = \sum_{\ell} c_{\ell} |1_{\ell}\rangle \quad (2B.1)$$

avec $\sum_{\ell} |c_{\ell}|^2 = 1$ (Eq. 2.102a). Cet état est l'état propre de \hat{N} , mais pas de l'hamiltonien $\hat{H} = \sum_{\ell} \hbar\omega_{\ell} \left(\hat{a}_{\ell}^{\dagger} \hat{a}_{\ell} + \frac{1}{2} \right)$ ni de chacun des $\hat{N}_{\ell} = \hat{a}_{\ell}^{\dagger} \hat{a}_{\ell}$.

L'émission spontanée d'un atome *unique* porté dans un état excité conduit à un tel état du rayonnement. Considérons en effet un atome à deux niveaux qui se trouve à l'instant $t = 0$ dans l'état excité $|b\rangle$ en présence du vide de rayonnement (situation étudiée dans la partie 3.3 du chapitre 3). Il est couplé par l'hamiltonien d'interaction quantique à tous les états de la forme $|a; 1_{\ell}\rangle$, où $|a\rangle$ est l'état fondamental de l'atome, et $|1_{\ell}\rangle$ représente un état comprenant un photon dans un mode ℓ . L'étude détaillée, effectuée dans le chapitre 1 du cours « Optique Quantique 1 » du couplage d'un état discret à un continuum, permet de calculer l'état final du système pour un temps long devant la durée de vie de l'état

excité. On trouve :

$$|\Psi\rangle = \left(\sum_{\ell} \gamma_{\ell}(t \rightarrow \infty) |1_{\ell}\rangle \right) \otimes |a\rangle \quad (2B.2)$$

γ_{ℓ} étant l'amplitude de probabilité d'émettre un photon d'émission spontanée dans le mode ℓ . La partie relative au rayonnement de cet état est donc bien de la forme (2B.1).

Un état à un photon de la forme (2B.1) n'est ni un état propre de \hat{N}_{ℓ} , ni un état propre de l'hamiltonien $\hat{H}_R = \sum_{\ell} \hbar\omega_{\ell}(\hat{N}_{\ell} + 1/2)$ dès lors qu'existent deux coefficients c_{ℓ} non nuls correspondants à des modes de fréquences différentes. Il évolue au cours du temps et vaut à l'instant t :

$$|1(t)\rangle = \sum_{\ell} e^{-i\omega_{\ell}t} |1_{\ell}\rangle \quad (2B.3)$$

On en déduit le signal de photodétection à l'instant t et au point \mathbf{r} (voir formule (2.2.103)) :

$$w(\mathbf{r}, t) = s \left\| \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}) |1(t)\rangle \right\|^2 = s \left| \sum_{\ell} c_{\ell} \mathcal{E}_{\ell} \vec{\epsilon}_{\ell} e^{i(\mathbf{k}_{\ell} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\ell}t)} \right|^2 \quad (2B.4)$$

Considérons le cas où la somme dans (2B.3) ne porte que sur des modes de même direction de propagation \mathbf{u} , et donc où $\mathbf{k}_{\ell} = \omega_{\ell} \mathbf{u}/c$. La dépendance en \mathbf{r} et t de w se fait alors par l'intermédiaire de la variable :

$$\tau = t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{u}/c. \quad (2B.5)$$

Il y a donc propagation sans déformation du signal de photodétection à la vitesse c dans la direction \mathbf{u} .

Remarque

Il est facile de voir que cette conclusion est vraie pour tout état initial du champ dont les seuls modes initialement excités correspondent à des vecteurs d'onde parallèles à \mathbf{u} . Ce résultat n'est donc pas spécifique aux états à un photon.

Dans le cas de l'émission spontanée, on peut montrer que, dans une direction \mathbf{u} donnée, l'état à un photon est de la forme (2B.1), avec des coefficients c_{ℓ} donnés par :

$$c_{\ell} = \frac{K}{\omega_{\ell} - \omega_0 + i\Gamma_{\text{sp}}/2} \quad (2B.6)$$

correspondant à une distribution spectrale du champ de forme Lorentzienne centrée en $\omega = \omega_0$ et de largeur¹ Γ . Le taux de photodétection s'écrit donc :

$$w(\tau) = sK^2 \left| \sum_{\ell} \mathcal{E}_{\ell} \frac{e^{-i\omega_{\ell}\tau}}{\omega_{\ell} - \omega_0 + i\Gamma_{\text{sp}}/2} \right|^2 \quad (2B.7)$$

¹Le coefficient K est une constante pouvant être déterminée par le formalisme du chapitre 3 ou par la normalisation de la fonction d'onde.

La sommation sur ℓ se fait en transformant la somme en une intégrale et en remarquant que \mathfrak{E}_ℓ varie peu autour de ω_0 ce qui permet de sortir ce facteur de l'intégrale. On admet qu'il en est de même pour la densité des modes ℓ . L'intégration par la méthode des résidus donne alors

$$w(\tau) = CH(\tau)e^{-\Gamma_{\text{sp}}\tau} . \quad (2B.8)$$

Dans cette expression, C est une constante issue de l'intégration, et $H(\tau)$ est la fonction échelon qui vaut 0 pour $\tau < 0$ et 1 pour $\tau \geq 0$. L'évolution de $w(\mathbf{r}, t)$ en un point d'abscisse \mathbf{r} donnée est une montée brutale à $t = \mathbf{r} \cdot \mathbf{u}/c$ suivie d'une décroissance exponentielle de durée caractéristique Γ_{sp}^{-1} (voir figure 2B.1) : on a ainsi un « paquet d'onde à un photon », sous la forme d'une impulsion amortie se propageant à la vitesse c selon \mathbf{u} . Nous avons d'autre part montré dans le chapitre 2 qu'un tel état donnait une probabilité nulle pour tout signal de double photodétection. Il correspond donc bien à l'idée intuitive qu'on peut se faire d'un photon unique.

Rappelons que la formule (2B.8) donne un *résultat de nature statistique*, relatif à la probabilité de photodétection en un point en fonction du temps. Pour mesurer cette quantité, il faut répéter un grand nombre de fois la même expérience, qui ne donne qu'un « clic » à chaque fois, et construire l'histogramme des résultats obtenus.

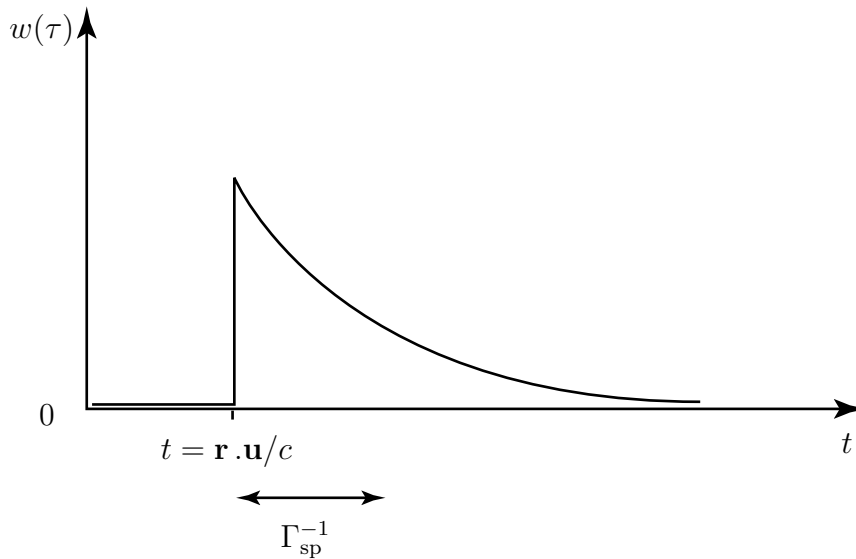


FIG. 2B.1: Probabilité de photodétection sur un « paquet d'onde à un photon », en un point \mathbf{r} , en fonction du temps. Le signal commence à l'instant $t = \mathbf{r} \cdot \mathbf{u}/c$ puis s'amortit exponentiellement. Noter que pour chaque mesure élémentaire on ne peut observer qu'une seule photodétection. Le signal ci-dessus ne peut être obtenu qu'en répétant l'expérience un grand nombre de fois.

2B.2 Anticorrélation à la sortie d'une lame semi-réfléchissante

Considérons maintenant une lame semi-réfléchissante séparant un faisceau lumineux incident en deux faisceaux de même intensité (2B.2). Nous pouvons utiliser les formules de transformation du chapitre 2 (Équations 2.107) pour déterminer les opérateurs champ complexe $\hat{E}_i^{(+)}$ ($i = 3, 4$) correspondant aux modes sortants en fonctions des opérateurs $E_i^{(+)}$ ($i = 1, 2$) correspondant aux modes entrants :

$$\begin{cases} \hat{E}_3^{(+)} &= (1/\sqrt{2})(\hat{E}_1^{(+)} + \hat{E}_2^{(+)}) \\ \hat{E}_4^{(+)} &= (1/\sqrt{2})(\hat{E}_1^{(+)} - \hat{E}_2^{(+)}) \end{cases} \quad (2B.9)$$

Notons que dans ces équations les différents opérateurs $\hat{E}_i^{(+)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) sont des restrictions de l'opérateur $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}$ (2.29) aux modes de fréquences quelconques mais se propageant dans une direction \mathbf{u}_i bien définie et ayant une polarisation définie. Ces relations permettent de calculer les signaux de photodétection sur les champs sortant de la lame si on connaît l'état quantique des champs entrants.

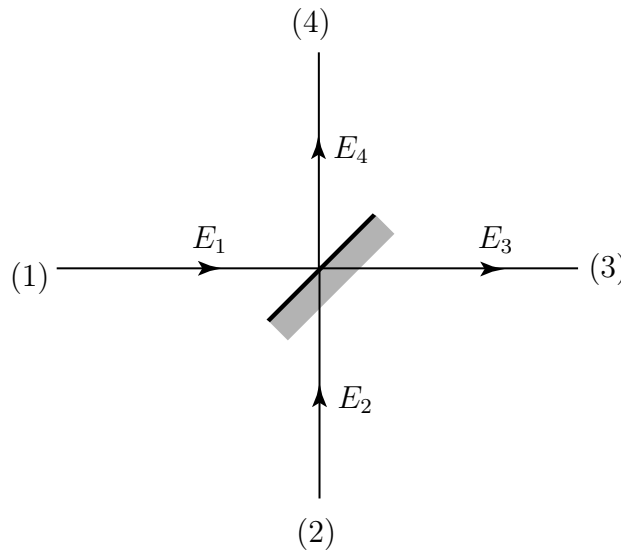


FIG. 2B.2: La lame semi-réfléchissante couple les deux champs entrant sur les voies (1) et (2) aux champs sortant sur les deux voies de sortie (3) et (4).

Plaçons-nous dans le cas où l'état entrant est le produit tensoriel d'un état $|\psi\rangle$ quelconque du rayonnement sur la voie 1 par le vide sur la voie 2. Le signal de photodétection

sur la voie de sortie 3 ou 4 est alors donné par :

$$\begin{aligned}
w_{3,4} &= s \left\| \hat{E}_{3,4}^{(+)} |1 : \psi\rangle \otimes |2 : 0\rangle \right\|^2 \\
&= s \left\| (1/\sqrt{2})(\hat{E}_1^{(+)} \pm \hat{E}_2^{(+)}) |1 : \psi\rangle \otimes |2 : 0\rangle \right\|^2 \\
&= \frac{s}{2} \left\| \hat{E}_1^{(+)} |1 : \psi\rangle \right\|^2 \\
&= \frac{w_1}{2} .
\end{aligned} \tag{2B.10}$$

On a noté w_1 est le signal de photodétection qu'on mesurerait directement sur la voie d'entrée 1. On retrouve, comme on pouvait s'y attendre, le fait que la lame semi-réfléchissante divise le faisceau incident en deux faisceaux d'intensités moyennes égales.

Considérons maintenant le signal de double photodétection, c'est-à-dire la probabilité $w^{(2)}$ de mesurer en coïncidence un clic sur la voie 3 et un sur la voie 4. D'après la formule (2.96), on a :

$$\begin{aligned}
w^{(2)} &= s^2 \langle \Psi | \hat{E}_4^{(-)} \hat{E}_3^{(-)} \hat{E}_3^{(+)} \hat{E}_4^{(+)} | \Psi \rangle \\
&= s^2 \left\| \hat{E}_3^+ \hat{E}_4^+ | \Psi \rangle \right\|^2
\end{aligned} \tag{2B.11}$$

où $|\Psi\rangle$ est l'état total du système. Dans le cas où le vide rentre par la voie 2, on trouve que l'on peut écrire $w^{(2)}$ sous la forme :

$$w^{(2)} = \frac{1}{4} \left\| (\hat{E}_1^{(+)})^2 |\psi\rangle \right\|^2 . \tag{2B.12}$$

Si le champ entrant est un état quasi-classique $|\alpha\rangle$, la probabilité conjointe $w^{(2)}$ est simplement le carré de la probabilité de simple photodétection $w^{(1)}$. En revanche, dans le cas où $|\psi\rangle$ est un état à un photon, *le signal de double photodétection est nul* : en effet $(\hat{E}_1^{(+)})^2$ est une combinaison de produits d'opérateurs d'annihilation $\hat{a}_j \hat{a}_k$, dont l'action sur n'importe lequel des kets $|1_\ell\rangle$ qui composent l'état à un photon donne 0. Il y a donc *anticorrélation* entre les comptages de photons sur les deux voies de sortie : la détection se produit soit d'un côté soit de l'autre, mais pas des deux côtés à la fois. On a ainsi démontré ce résultat, qui n'est pas vraiment surprenant si l'on considère le photon comme un corpuscule : un photon unique ne peut pas être détecté deux fois.

Dans la situation étudiée ici, on peut dire que *la lame semi-réfléchissante ne « coupe » pas le photon en deux* », mais qu'elle l'envoie soit sur une de ses sorties, soit sur l'autre, la répartition se faisant avec une probabilité 0,5 pour chacune des possibilités.

Présenté ainsi, ce résultat peut paraître anodin. Il est en fait en contradiction avec le comportement attendu dans le cadre d'une description ondulatoire classique de la lumière. En effet, une onde, électromagnétique classique est partagée sur la lame semi-réfléchissante en deux ondes d'amplitudes égales, et on montre aisément dans le cadre de la théorie classique l'inégalité suivante entre la probabilité de photodétection conjointe $w^{(2)}$ et les probabilités de photodétection simple $w_3^{(1)}$ et $w_4^{(1)}$ dans les deux voies de sortie :

$$w^{(2)} \geq w_3^{(1)} w_4^{(1)} . \tag{2B.13a}$$

Cette relation découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\overline{i(t)^2} \geq (\overline{i(t)})^2$ qui s'applique à l'intensité lumineuse classique, le signe $-$ indiquant une moyenne temporelle ou statistique. La description classique ne prévoit donc pas la possibilité d'une valeur nulle du signal de photodétection conjointe lorsque les probabilités de détection simple sont toutes les deux différentes de zéro.

Remarquons au contraire que le résultat quantique (2B.12) est en accord avec l'inégalité classique (2B.13a), lorsque l'état entrant est un état quasi-classique, puisque dans ce cas on a :

$$w^{(2)} = w_3^{(1)} w_4^{(1)} . \quad (2B.13b)$$

Cette relation a été vérifiée expérimentalement [28], avec une impulsion lumineuse produite par une diode électroluminescente fortement atténuée, de manière à ne transporter *en moyenne* qu'un centième de photon (l'énergie moyenne par impulsion est de $\hbar\omega/100$ dans l'expérience de la note 28). On vérifie alors que les probabilités de photodétection simple valent $1/200$ sur chaque voie de sortie de la semi-réfléchissante, tandis que la probabilité de détection conjointe vaut $0,25 \times 10^{-4}$. La même expérience, réalisée avec une source d'états à un seul photon, donne une probabilité de détection conjointe nulle, aux défauts expérimentaux près, qui donnaient une contribution beaucoup plus petite que $0,25 \times 10^{-4}$.

On voit donc que la lame semi-réfléchissante, objet d'apparence anodine, permet de différencier très nettement un état à un photon d'un état quasi-classique, même si celui-ci comporte en moyenne un photon, voire beaucoup moins.

C'est d'ailleurs en réalisant l'expérience que nous venons de décrire que les auteurs de l'expérience d'interférométrie citée dans le chapitre 2 (Figure 2.8) se sont assurés qu'ils avaient bien été capable de produire un état à un seul photon différent d'un état quasi-classique très atténué. On peut aussi dire de manière plus imagée qu'ils ont vérifié que le photon sort soit d'un côté, soit de l'autre de la première lame semi-réfléchissante (figure 2.2.7), mais jamais des deux côtés à la fois. Mais, si l'on se souvient maintenant que les interférences qu'ils ont observées s'interprètent en admettant que la lumière emprunte simultanément les deux voies de l'interféromètre séparées par la lame, on trouve ici un exemple particulièrement frappant de la dualité onde-corpuscule.

Complément 2C

Photons intriqués en polarisation et violation des inégalités de Bell¹

2C.1 Du débat Einstein Bohr aux inégalités de Bell et à l'information quantique : une brève histoire de l'intrication

L'intrication est une des propriétés les plus étonnantes de la mécanique quantique, mais il a fallu attendre la fin du XX^{ème} siècle pour en apprécier pleinement l'importance, et pour réaliser qu'elle peut conduire à des applications révolutionnaires, dans le domaine de l'information quantique. C'est A. Einstein qui, après avoir renoncé à contester la dualité onde-particule et les relations de Heisenberg appliquées à une seule particule, découvrit les propriétés extraordinaires des états non factorisables de deux particules qu'il présenta dans le célèbre article de 1935 écrit avec B. Podolsky et N. Rosen (article « EPR »²). Schrödinger allait peu après donner à ces états le qualificatif « entangled » (en français « intriqués », on peut aussi dire « enchevêtrés ») pour souligner que les deux particules y ont des propriétés indissolublement liées.

Dans l'article EPR, Einstein et ses collaborateurs s'appuient sur les prédictions quantiques pour conclure que le formalisme de la mécanique quantique n'est pas complet, qu'il ne rend pas compte de la totalité de la réalité physique, et qu'il faut donc s'attacher à le compléter. Il ne s'agit pas de contester la validité de ce formalisme, mais bien plutôt d'introduire un niveau supplémentaire de description, plus détaillé, dans lequel chaque particule de la paire EPR aurait des propriétés bien définies non prises en compte par le formalisme quantique. L'espoir est alors de retrouver les prévisions de la mécanique quan-

¹Pour plus de détails, et pour une bibliographie plus complète, on pourra consulter : A. Aspect, in « *Quantum [Un] speakables - From Bell to Quantum Information* », edited by R.A. Bertelmann and A. Zeilinger, Springer (2002). Ce texte est disponible sur la toile, à <http://hal.ccsd.cnrs.fr/ccsd-00001079>, ou encore sur le site <http://arXiv.org> sous la référence [quant-ph/0402001](http://arXiv.org/abs/quant-ph/0402001).

²A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, « *Can Quantum. Mechanical description of physical reality be considered complete?* » *Physical Review* 47, 777 (1935).

tique habituelle en faisant une moyenne statistique sur ces variables supplémentaires. La démarche serait analogue à celle qui prévaut en théorie cinétique des gaz, où l'on peut en principe décrire chaque molécule d'un gaz avec sa trajectoire, bien qu'il suffise en pratique d'utiliser une description statistique (la distribution de Maxwell-Boltzmann) pour rendre compte des propriétés du gaz qui intéressent le physicien.

Niels Bohr fut semble-t-il bouleversé par cet argument qui s'appuie sur le formalisme quantique lui-même pour en affirmer l'incomplétude, et il s'attacha à réfuter l'argument, affirmant que dans un état intriqué on ne peut parler des propriétés individuelles de chaque particule.

On pourrait penser que cette controverse entre deux géants de la physique du XX^e siècle eut un immense écho chez les physiciens. En fait, lors de la publication en 1935 de l'article EPR, la Mécanique Quantique allait de succès en succès et la plupart des physiciens ignorèrent ce débat qui leur paraissait académique : il semblait que l'adhésion à l'une ou l'autre des positions fût une affaire de goût personnel (ou de position épistémologique) sans aucune conséquence pratique sur la mise en œuvre du formalisme quantique, ce qu'Einstein lui-même ne semblait pas contester.

Il fallut attendre trente ans pour voir un démenti à cette position relativement consensuelle, avec la parution, en 1964, d'un court article de John Bell³ qui allait modifier radicalement la situation. En quelques lignes de calcul, cet article montre que si l'on prend au sérieux l'argument EPR, et qu'on introduit explicitement des variables supplémentaires pour comprendre les corrélations fortes entre les deux particules, alors on aboutit à une contradiction avec les prédictions quantiques. Le théorème de Bell fait donc passer le débat entre Bohr et Einstein du domaine de l'épistémologie (l'interprétation des théories physiques) à celui de la physique expérimentale : il devient possible de trancher le débat en mesurant des corrélations et en cherchant si elles violent les inégalités de Bell conformément aux prédictions quantiques, ou si au contraire elles satisfont à ces inégalités qui découlent de la position d'Einstein.

L'importance du théorème de Bell (l'incompatibilité entre la Mécanique Quantique et toute tentative de la compléter dans l'esprit défendu par Einstein) n'a été reconnue que progressivement. En 1969, l'article de J. Clauser, M. Horne, A. Shimony et R. Holt⁴ propose d'utiliser des paires de photons intriqués en polarisation émis dans certaines cascades radiatives atomiques, ce qui va déclencher quelques expériences pionnières au début des années 1970. Mais la technologie de l'époque est limitée, et les premières expériences – encore éloignées du schéma idéal – donnent d'abord des résultats contradictoires, avec cependant une tendance en faveur de la mécanique quantique. Grâce aux progrès des lasers, il devient possible à la fin des années 1970 de construire une source de paires de photons intriqués en polarisation aux performances remarquables. Elle va permettre de conclure de

³J.S. Bell, « *On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox* », *Physics* **1**, 195-200 (1964). Article reproduit dans le livre « *Speakable and unspeakable in quantum mechanics* », J.S. Bell, Cambridge University Press, 2nd édition (2004).

⁴J. Clauser, M. Horne, A. Shimony, R. Holt, « *Proposed experiments to test local hidden-variable theories* », *Physical Review Letters* **23**, 880 (1969).

façon non ambiguë à la violation des inégalités de Bell, dans des schémas expérimentaux de plus en plus proche de l'expérience de pensée idéale – la « GedankenExperiment » chère à Einstein.

De plus en plus de physiciens réalisent alors le caractère extraordinaire de l'intrication, mis en évidence par la violation des inégalités de Bell⁵. On va développer une troisième génération de sources de paires de photons intriqués, basées sur des effets d'optique non-linéaire non plus dans des atomes, mais dans des cristaux anisotropes (cf. chapitre 6). Un progrès majeur qui en résulte est la maîtrise de la direction d'émission des photons intriqués, ce qui permet d'injecter les deux membres de chaque paire dans deux fibres optiques dirigées vers des directions opposées. On a ainsi pu réaliser des expériences avec des distances de source à détecteur de plusieurs centaines de mètres, voire des dizaines de kilomètres comme dans une expérience qui utilise le réseau commercial de fibres optiques de la compagnie suisse de télécommunications.

Toutes ces expériences ont confirmé la violation des inégalités de Bell, et permis de souligner les propriétés extraordinaires de l'intrication. C'est alors qu'a émergé l'idée nouvelle que l'intrication pouvait ouvrir des possibilités nouvelles pour transmettre et traiter l'information. C'est le domaine nouveau de l'information quantique pour lequel l'intrication est devenu une ressource, à la disposition des physiciens et des mathématiciens, des informaticiens, des ingénieurs.

2C.2 Photons corrélés en polarisation : paire EPR

2C.2.1 Mesure de polarisation sur un seul photon

Considérons deux modes ℓ' et ℓ'' du champ électromagnétique caractérisés par le même vecteur d'onde parallèle à \mathbf{Oz} ayant des polarisations orthogonales $\boldsymbol{\varepsilon}'$ et $\boldsymbol{\varepsilon}''$ suivant \mathbf{Ox} et \mathbf{Oy} . Si on se limite à des états à un seul photon (voir le Complément 2B), l'espace des états \mathcal{E} est de dimension 2, et les vecteurs d'état $\{|n_{\boldsymbol{\varepsilon}'} = 1\rangle; |n_{\boldsymbol{\varepsilon}''} = 1\rangle\}$ constituent une base orthogonale que l'on notera $\{|x\rangle; |y\rangle\}$.

La base $\{|x\rangle; |y\rangle\}$ est en fait associée à une observable, la polarisation suivant \mathbf{Ox} , que l'on peut mesurer avec un analyseur de polarisation (que nous appellerons « polariseur »

⁵Un exemple de cette évolution est fourni par deux citations de R. Feynman à propos des corrélations EPR :

- « This point was never accepted by Einstein... it became known as the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. But when the situation is described as we have done it here, there doesn't seem to be any paradox at all... ». *The Feynman Lectures on Physics*, Tome III, Chapitre 18 (Addison-Wesley, 1965).

- « I have entertained myself always by squeezing the difficulty of quantum mechanics into a smaller and smaller place, so as to get more and more worried about this particular item. It seems to be almost ridiculous that you can squeeze it to a numerical question that one thing is bigger than another. But there you are - it is bigger... ». R.P. Feynman, *International Journal of Theoretical Physics*, **21**, p. 467 (1982). On notera que c'est dans ce même article que Feynmann introduit l'idée qu'un ordinateur quantique pourrait être fondamentalement plus puissant qu'un ordinateur classique.

pour faire court) (figure 2C.1). Ce dispositif possède deux voies de sortie $+1$ et -1 , telles que les photons $|x\rangle$ vont avec certitude dans la voie $+1$, et les photons $|y\rangle$ vers la voie -1 . Pour décrire ce type de mesure, on introduit l'observable $\hat{A}(0)$ ayant pour vecteurs propres les états $|x\rangle$ et $|y\rangle$ et pour valeurs propres $+1$ et -1 . L'opérateur correspondant s'écrit, dans la base $\{|x\rangle; |y\rangle\}$

$$\hat{A}(0) = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2C.1)$$

Le polariseur peut en fait tourner autour de l'axe \mathbf{Oz} , et on repère son orientation par un vecteur unitaire \mathbf{u} , ou encore par l'angle $\theta = (\mathbf{Ox}, \mathbf{u})$ de \mathbf{u} avec \mathbf{Ox} . Une mesure de polarisation dans l'orientation θ est associée à des polarisations linéaires suivant θ ou $\theta + \frac{\pi}{2}$; les vecteurs propres de l'observable $\hat{A}(\theta)$ sont obtenus par rotation

$$|+\theta\rangle = \cos \theta |x\rangle + \sin \theta |y\rangle, \quad (2C.2)$$

$$|-\theta\rangle = -\sin \theta |x\rangle + \cos \theta |y\rangle, \quad (2C.3)$$

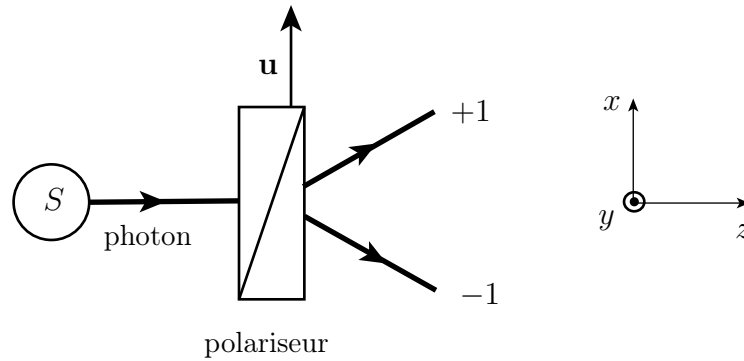


FIG. 2C.1: **Mesure de polarisation de la lumière.** Le polariseur, qui peut tourner autour de l'axe \mathbf{Oz} de propagation de la lumière, effectue une mesure de polarisation suivant \mathbf{u} , perpendiculaire à \mathbf{Oz} . La figure est faite dans le cas particulier où \mathbf{u} est suivant \mathbf{Ox} ($\theta = 0$). De la lumière polarisée suivant \mathbf{u} sort dans la voie $+1$, tandis que de la lumière polarisée perpendiculairement à \mathbf{u} sort dans la voie -1 . Dans le cas général, une fraction sort dans chaque voie. Un photon unique, qui ne peut se partager, sort soit dans la voie $+1$ soit dans la voie -1 , avec des probabilités qui dépendent de l'état quantique. On dit qu'on effectue sur lui une mesure de polarisation suivant \mathbf{u} , dont les résultats peuvent être $+1$ ou -1 .

et $\hat{A}(\theta)$ s'écrit dans la base $\{|x\rangle, |y\rangle\}$

$$\hat{A}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}. \quad (2C.4)$$

On vérifie sans peine que $\hat{A}|\pm\theta\rangle = \pm|\pm\theta\rangle$.

Si on considère un photon incident polarisé linéairement suivant une direction faisant avec \mathbf{Oz} un angle λ , son état s'écrit

$$|\psi\rangle = |+\lambda\rangle = \cos \lambda |x\rangle + \sin \lambda |y\rangle . \quad (2C.5)$$

Une mesure par le polariseur orienté suivant θ donnera les résultats $+1$ ou -1 avec des probabilités

$$P_+(\theta, \lambda) = |\langle +\theta | +\lambda \rangle|^2 = \cos^2(\theta - \lambda) \quad (2C.6)$$

$$P_-(\theta, \lambda) = |\langle -\theta | +\lambda \rangle|^2 = \sin^2(\theta - \lambda) \quad (2C.7)$$

Les expressions (2C.6) et (2C.7) traduisent en terme de probabilité pour un seul photon le résultat classique de la loi de Malus, qui donne les intensités transmises dans les voies $+1$ et -1 du polariseur pour un faisceau incident polarisé suivant la direction λ .

Remarques

(i) Les polariseurs sont des dispositifs courants dans le domaine visible, réalisés le plus souvent soit à partir de cristaux anisotropes biréfringents, soit en accolant deux prismes par leurs hypothénuses recouvertes d'un empilement de couches diélectriques judicieusement calculées. Dans le premier cas \mathbf{u} correspond à l'axe optique du cristal biréfringent. Dans le deuxième, \mathbf{u} est dans le plan d'incidence sur les hypothénuses (figure 2C.2)

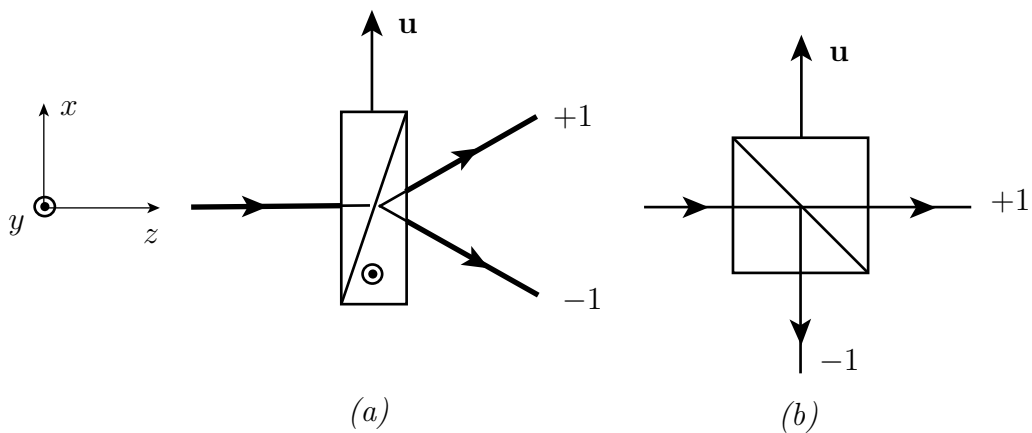


FIG. 2C.2: **Polariseur biréfringent (a) ou à couches diélectriques (b)**, dessiné dans l'orientation $\theta = 0$. Pour effectuer des mesures de polarisation, il suffit de disposer deux compteurs de photons dans les voies $+1$ et -1 .

(ii) Il y a manifestement une grande analogie entre la mesure de polarisation sur un photon et la mesure d'une composante de spin sur une particule de spin $1/2$. On prendra néanmoins garde au facteur 2 devant les angles caractérisant les orientations, liés au fait que les états de spin orthogonaux dans l'espace de Hilbert, $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$, correspondent à des orientations faisant un angle de 180° dans l'espace physique, alors que pour la polarisation des photons l'orthogonalité dans l'espace de Hilbert correspond des orientations orthogonales des polariseurs. Ces propriétés reflètent le fait qu'une rotation d'angle θ autour de \mathbf{Oz} est décrite par un opérateur $\exp\{-i\theta\hat{J}_z\}$, et que le moment cinétique du photon vaut $J = 1$ tandis que le spin de l'électron vaut $J = 1/2$ (CDL, complément B.VI).

(iii) Les mesures associées à l'observable $\hat{A}(\mathbf{u})$ sont effectuées en disposant dans les voies de sortie +1 et -1, des dispositifs capables de détecter un seul photon (photomultiplicateurs ou photodiodes à avalanches).

(iv) On peut généraliser la démarche ci-dessus et introduire des polarisations circulaires :

$$|\varepsilon_+\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + i|y\rangle) \quad (2C.8)$$

$$|\varepsilon_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle - i|y\rangle) \quad (2C.9)$$

Les kets $|\varepsilon_+\rangle$ et $|\varepsilon_-\rangle$ constituent manifestement une base orthonormée de l'espace \mathcal{E} . Le signe global, a priori arbitraire, a été choisi de façon cohérente avec les définitions classiques (voir par exemple le complément 2A du cours « Optique Quantique 1 »).

2C.2.2 Paires de photons. Mesures conjointes de polarisation

Considérons maintenant une paire de photons ν_1 et ν_2 , émis simultanément, respectivement suivant $-\mathbf{Oz}$ et $+\mathbf{Oz}$ (figure 2C.3). L'état de polarisation de la paire est décrit par un ket de l'espace

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \quad (2C.10)$$

produit tensoriel des espaces à deux dimensions \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 décrivant les polarisations de ν_1 et ν_2 .

L'espace \mathcal{E} est de dimension 4, avec la base évidente

$$\mathcal{E} = \{|x_1, x_2\rangle; |x_1, y_2\rangle; |y_1, x_2\rangle; |y_1, y_2\rangle\}. \quad (2C.11)$$

Les propriétés de polarisation d'une paire sont décrites par un vecteur $|\psi\rangle$ de cet espace.

À l'aide des polariseurs I et II, orientés suivant les directions d'analyse \mathbf{a} et \mathbf{b} (angles $\theta_{\mathbf{a}}$ et $\theta_{\mathbf{b}}$ avec \mathbf{Ox}), on effectue des mesures de polarisation sur chaque photon. Une mesure conjointe peut donner l'un des 4 résultats : (+1, +1), (+1, -1), (-1, +1) ou (-1, -1). Les probabilités correspondantes sont :

$$P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\langle +_{\mathbf{a}}, +_{\mathbf{b}} | \psi \rangle|^2 \quad (2C.12)$$

$$P_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\langle +_{\mathbf{a}}, -_{\mathbf{b}} | \psi \rangle|^2 \quad (2C.13)$$

etc...

On peut aussi s'intéresser aux probabilités simples. Elles sont reliées aux probabilités conjointes. Par exemple, la probabilité d'obtenir +1 pour le photon ν_1 vaut

$$P_+(\mathbf{a}) = P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + P_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \quad (2C.14)$$

Remarques

(i) Ces probabilités se mesurent en plaçant des détecteurs de photons dans les voies correspondantes des polariseurs, et en utilisant des circuits électroniques à coïncidences capables d'identifier des détections simultanées à quelques nanosecondes près.

(ii) Pour ne pas alourdir inutilement les notations, on omet souvent (comme ci-dessus à partir de 2C.12) les indices 1 et 2 et il est alors entendu que la première quantité désigne le photon ν_1 , et la seconde le photon ν_2 .

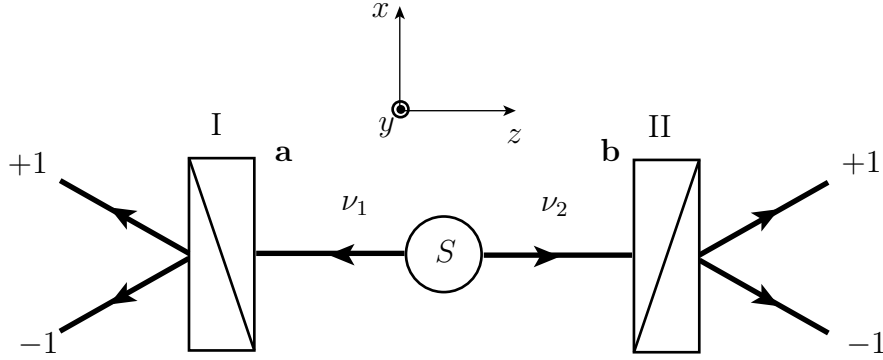


FIG. 2C.3: *Expérience de pensée EPR avec des paires de photons corrélés en polarisation.* Les photons ν_1 et ν_2 d'une même paire sont analysés en polarisation suivant les directions **a** et **b** par les polariseurs I et II (les vecteurs **a** et **b** qui caractérisent les orientations des polariseurs sont perpendiculaires à **Oz**). Les résultats des mesures permettent de mettre en évidence les corrélations de polarisation.

2C.2.3 Paires EPR corrélées en polarisation

Considérons des paires de photons dans l'état

$$|\psi_{\text{EPR}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x, x\rangle + |y, y\rangle). \quad (2C.15)$$

Notons d'emblée le caractère particulier de cet état, pour lequel on ne peut attribuer de polarisation précise ni au photon ν_1 ni au photon ν_2 . Il est en effet impossible de factoriser cet état sous forme d'un produit tensoriel de deux termes respectivement associés à ν_1 et ν_2 , à la différence de chacun des états $|x, x\rangle$ ou $|y, y\rangle$ pris séparément ($|x, x\rangle$ représente un photon ν_1 polarisé suivant **Ox** et un photon ν_2 polarisé suivant **Ox**). L'impossibilité de factoriser un état tel que $|\psi_{\text{EPR}}\rangle$ est au cœur de l'intrication.

Il est facile de calculer les probabilités de détections conjointes attendues pour l'état $|\psi_{\text{EPR}}\rangle$, les polariseurs I et II étant orientés respectivement suivant **a** et **b** faisant les angles $\theta_{\mathbf{a}}$ et $\theta_{\mathbf{b}}$ avec l'axe **Ox**. Par exemple, en utilisant (2C.12) et (2C.2), on obtient

$$P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\langle +_{\mathbf{a}}, +_{\mathbf{b}} | \psi_{\text{EPR}} \rangle|^2 = \frac{1}{2} \cos^2(\theta_{\mathbf{a}} - \theta_{\mathbf{b}}) = \frac{1}{2} \cos^2(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \quad (2C.16)$$

De même, on trouve

$$P_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} \cos^2(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad (2C.17)$$

$$P_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} \cos^2(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \quad (2C.18)$$

On note que ces probabilités ne dépendent que de l'angle $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \theta_{\mathbf{b}} - \theta_{\mathbf{a}}$ entre les polariseurs, pas de leurs orientations absolues. Le résultat est invariant par rotation autour de \mathbf{Oz} .

La probabilité simple d'obtenir $+1$ pour le photon ν_1 , indépendamment du résultat sur ν_2 , vaut

$$P_+(\mathbf{a}) = P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + P_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2}. \quad (2C.19)$$

On obtient de même

$$P_-(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} \quad (2C.20)$$

et

$$P_+(\mathbf{b}) = P_-(\mathbf{b}) = \frac{1}{2}. \quad (2C.21)$$

Nous constatons d'abord (2C.19-2C.21) que chaque mesure donne des résultats qui, pris séparément, apparaissent aléatoires. Si on représente le résultat de la mesure par le polariseur I (orienté suivant \mathbf{a}) à l'aide d'une variable aléatoire classique $\mathcal{A}(\mathbf{a})$, ne pouvant prendre que les valeurs $+1$ ou -1 , on a, d'après les équations (2C.19) et (2C.20) :

$$\mathcal{P}[\mathcal{A}(\mathbf{a}) = +1] = \mathcal{P}[\mathcal{A}(\mathbf{a}) = -1] = \frac{1}{2}. \quad (2C.22)$$

Ce résultat apparaît parfaitement aléatoire, et la moyenne (statistique notée $\overline{\quad}$) de $\mathcal{A}(\mathbf{a})$ vaut

$$\overline{\mathcal{A}(\mathbf{a})} = 0. \quad (2C.23)$$

De même, le résultat de la mesure de polarisation de ν_2 , par le polariseur II orienté suivant la direction \mathbf{b} , est une variable aléatoire $\mathcal{B}(\mathbf{b})$ ne pouvant prendre que les valeurs $+1$ et -1 , et de valeur moyenne nulle

$$\overline{\mathcal{B}(\mathbf{b})} = 0. \quad (2C.24)$$

Ainsi, dans l'état EPR, chaque photon pris séparément apparaît non polarisé. Mais nous allons voir que les polarisations de ν_1 et ν_2 sont *corrélées*. Pour cela, on s'intéresse au coefficient de corrélation entre les variables aléatoires $\mathcal{A}(\mathbf{a})$ et $\mathcal{B}(\mathbf{b})$. Il vaut par définition

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\overline{\mathcal{A}(\mathbf{a}) \cdot \mathcal{B}(\mathbf{b})} - \overline{\mathcal{A}(\mathbf{a})} \cdot \overline{\mathcal{B}(\mathbf{b})}}{\left(\overline{|\mathcal{A}(\mathbf{a})|^2}\right)^{1/2} \cdot \left(\overline{|\mathcal{B}(\mathbf{b})|^2}\right)^{1/2}}. \quad (2C.25)$$

La définition ci-dessus est relative aux variables aléatoires $\mathcal{A}(\mathbf{a})$ et $\mathcal{B}(\mathbf{b})$, qui représentent les résultats de mesure. Si ces résultats de mesure sont donnés par les prédictions quantiques relatives à une paire EPR (2C.16-2C.18), on a

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{A}(\mathbf{a})\mathcal{B}(\mathbf{b})} &= P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + P_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ &= \cos 2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) .\end{aligned}\tag{2C.26}$$

En tenant compte de (2C.23) et (2C.24), et du fait que

$$\mathcal{A}(\mathbf{a})^2 = \mathcal{B}(\mathbf{b})^2 = 1\tag{2C.27}$$

on trouve que la mécanique quantique prédit pour l'état EPR un coefficient de corrélation de polarisation

$$E_{\text{MQ}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \overline{\mathcal{A}(\mathbf{a}) \cdot \mathcal{B}(\mathbf{b})} = \cos 2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) .\tag{2C.28}$$

Si on oriente les polariseurs I et II suivant la même direction ($(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$), le coefficient de corrélation prédit par le calcul quantique vaut 1 : il s'agit d'une corrélation totale.

On peut voir directement cette corrélation totale en considérant la valeur des probabilités conjointes pour $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$. On a par exemple $P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \frac{1}{2}$. En se souvenant que $P_+(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}$, on peut en déduire que la probabilité conditionnelle de trouver +1 pour ν_2 , suivant $\mathbf{b} = \mathbf{a}$, après avoir trouvé +1 pour ν_1 , suivant \mathbf{a} , vaut⁶

$$\begin{aligned}P\{\mathcal{B}(\mathbf{a}) = +1 \mid \mathcal{A}(\mathbf{a}) = +1\} &= \frac{\mathcal{P}\{\mathcal{B}(\mathbf{a}) = +1 \text{ ET } \mathcal{A}(\mathbf{a}) = +1\}}{\mathcal{P}\{\mathcal{A}(\mathbf{a}) = +1\}} \\ &= \frac{P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{a})}{P_+(\mathbf{a})} = 1 .\end{aligned}\tag{2C.29}$$

On est donc certain de trouver +1 pour ν_2 si on a trouvé +1 pour ν_1 (les polariseurs ayant la même orientation). On montrerait de même que si on trouve -1 pour ν_1 , alors on trouve -1 pour ν_2 . La corrélation totale est confirmée par le fait que $P_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = P_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$: si on trouve +1 pour ν_1 , on ne trouve jamais -1 pour ν_2 , et vice-versa.

Le degré de corrélation (2C.28) dépend de l'angle entre les polariseurs. Pour $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \pi/4$ il est nul, mais pour $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \pi/2$ il vaut -1, ce qui correspond encore à une corrélation totale (le signe - voulant dire que si on trouve +1 d'un côté on est certain de trouver -1 de l'autre, et vice-versa).

La prédiction quantique de corrélations totales entre certaines mesures sur deux particules éloignées, séparées spatialement mais décrites par un état intriqué, a été découverte par Einstein, Podolsky et Rosen. Ils en ont conclu que la mécanique quantique est une théorie incomplète. C'est ce point que nous allons examiner maintenant.

⁶Ph. Réfrégier, « *Noise Theory and Applications in Physics* », from Fluctuations to Information, Springer, New-York, 2004.

Remarque

On peut obtenir directement $E_{MQ}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ (équation 2C.28) en remplaçant dans la définition (2C.25) les variables aléatoires $\mathcal{A}(\mathbf{a})$ et $\mathcal{B}(\mathbf{b})$ par les observables quantiques $\hat{A}(\mathbf{a})$ et $\hat{B}(\mathbf{b})$ introduites au paragraphe 2C.2.1, et en prenant la moyenne quantique $\langle \ \rangle$ à la place de la moyenne statistique $\overline{\ \ }.$ Si nous avons détaillé le calcul, c'est pour bien distinguer dans le raisonnement ce qui est quantique (le calcul des probabilités des résultats de mesure) de ce qui relève des probabilités ordinaires (la définition du coefficient de corrélation). Les résultats de mesure (apparition d'un « clic » sur un photomultiplicateur) sont des événements macroscopiques, auxquels on peut appliquer sans problème les notions habituelles de probabilité.

2C.2.4 Recherche d'une image pour interpréter les corrélations entre mesures éloignées

a) Image basée sur les calculs quantiques

Comment est-il possible d'interpréter avec des images le calcul ayant mené à la prédiction (2C.28) d'une corrélation totale ? Tels que nous les avons présentés, les calculs ont été faits dans un espace de configuration où on décrit globalement les deux particules, et il est difficile de représenter les choses dans l'espace réel. Pour tenter de le faire, nous pouvons imaginer que le polariseur I est un peu plus près de la source que le polariseur II de telle sorte que la mesure se passe d'abord en I, puis en II.

La première étape – mesure de la polarisation de ν_1 suivant \mathbf{a} – peut donner les résultats $+1$ ou -1 avec la même probabilité (2C.19)-(2C.20). Pour continuer le calcul, nous appliquons le « postulat de réduction du paquet d'onde »⁷ : juste après la mesure, le vecteur d'état du système est la projection (normée) de l'état initial sur le sous-espace propre associé au résultat obtenu. Nous supposons pour simplifier que le polariseur I est orienté suivant \mathbf{Ox} . Si on obtient $+1$, le sous-espace propre correspondant, de dimension 2, est engendré par $\{|x, x\rangle; |x, y\rangle\}$. La projection de $|\psi_{EPR}\rangle$ (2C.15) sur ce sous-espace donne $|\psi'_+\rangle = |x, x\rangle$. De même si on obtient -1 pour le photon ν_1 (valeur propre associée à $|y\rangle$) le sous-espace propre correspondant est engendré par $\{|y, x\rangle; |y, y\rangle\}$, et après projection de $|\psi_{EPR}\rangle$ l'état de la paire est devenu $|\psi'_-\rangle = |y, y\rangle$.

De façon générale, on montre sans peine que si le polariseur I est orienté suivant \mathbf{a} quelconque, et si le résultat de la mesure sur ν_1 est $+1$, on obtient juste après la mesure

$$|\psi'_{+\mathbf{a}}\rangle = |+\mathbf{a}, +\mathbf{a}\rangle . \quad (2C.30)$$

Pour un résultat -1 le vecteur d'état « réduit » est

$$|\psi'_{-\mathbf{a}}\rangle = |-\mathbf{a}, -\mathbf{a}\rangle . \quad (2C.31)$$

Les états (2C.30) ou (2C.31) sont factorisables : le vecteur ν_2 a maintenant une polarisation bien définie, parallèle à \mathbf{a} dans le cas $+1$, perpendiculaire à \mathbf{a} dans le cas -1 . Les

⁷Voir par exemple CDL, chapitre III, ou BD, chapitre 5.

probabilités d'obtenir $+1$ ou -1 lors de la mesure sur ν_2 par le polariseur II, orienté suivant \mathbf{b} , valent respectivement $\cos^2(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ou $\sin^2(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. En multipliant par les probabilités $1/2$ de trouver $+1$ ou -1 pour la première mesure (sur ν_1), on retrouve les expressions (2C.16)-(2C.18) des probabilités conjointes.

Le calcul en deux étapes fournit donc les mêmes résultats que le calcul global. Il est plus compliqué, mais il a l'avantage de suggérer une image dans l'espace réel. L'image est la suivante : tant qu'aucune mesure n'a été effectuée, on a autant de chance d'avoir $+1$ ou -1 avec chaque photon. Mais dès qu'une première mesure est effectuée et a donné un résultat, par exemple $+1$ suivant \mathbf{a} pour ν_1 , alors le second photon est projeté dans un état de polarisation identique à celui trouvé pour le premier, l'état $|+_{\mathbf{a}}\rangle$ dans l'exemple ci-dessus.

On comprend aisément qu'une telle image soit inacceptable pour Einstein. Le calcul ci-dessus reste en effet valable quelle que soit la distance entre les polariseurs I et II, et rien n'interdit que les deux mesures soient des événements séparés par un « intervalle du genre espace au sens relativiste »⁸. Or la « projection du paquet d'onde » lors de la mesure sur le premier photon est a priori instantanée, et dans l'image donnée ici le second photon adopte instantanément la polarisation trouvée pour le premier. Pour connecter ces deux événements, un hypothétique signal « indiquant à ν_2 qu'il doit prendre une polarisation identique à celle trouvée pour ν_1 », devrait donc se propager plus vite que la lumière.

b) Image classique par paramètre commun

Il existe a priori une image sans problème vis-à-vis de la causalité relativiste pour comprendre des corrélations entre les deux photons : s'il existe un paramètre identique pour les deux photons de la même paire, et si les résultats de mesure sur chaque particule dépendent de ce paramètre, on rend compte sans difficulté de corrélations. On peut par exemple imaginer que la moitié des paires sont émises dès le début avec une polarisation commune suivant \mathbf{Ox} , et l'autre moitié avec une polarisation commune suivant \mathbf{Oy} : si les polariseurs sont orientés suivant \mathbf{Ox} , on aura bien les résultats prédits par la mécanique quantique pour cette orientation, à savoir

$$P_{++} = P_{--} = \frac{1}{2}, \quad (2C.32)$$

$$P_{+-} = P_{-+} = 0. \quad (2C.33)$$

Avant d'examiner plus avant la possibilité de comprendre ainsi l'ensemble des résultats quantiques, indiquons immédiatement qu'une telle description va nécessairement au-delà du formalisme de la Mécanique Quantique, puisqu'on introduit différents types de paires dès leur émission (dans l'exemple ci-dessus on a les paires polarisées suivant \mathbf{Ox} et celles polarisées suivant \mathbf{Oy}). Au contraire, l'état quantique (2C.15) est le même pour toutes les paires. Introduire un paramètre qui distingue les paires entre elles revient donc à compléter le formalisme quantique, dont on admet qu'il ne donne qu'une image incomplète de la

⁸Rappelons qu'il s'agit d'une situation dans laquelle la distance $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ entre deux événements (\mathbf{r}_1, t_1) et (\mathbf{r}_2, t_2) est supérieure à $c|t_1 - t_2|$, où c est la vitesse de la lumière, et t_1 et t_2 les dates des événements. Cette propriété est invariante par changement de référentiel.

réalité, dans la ligne du raisonnement de l'article EPR. On parlera donc de « paramètres supplémentaires », ou « variables cachées », pour ces quantités complétant le formalisme quantique.

Le modèle présenté ci-dessus est trop élémentaire pour reproduire les prédictions quantiques dans toutes les orientations des polariseurs, mais on peut tenter de le généraliser. Supposons par exemple que les deux photons d'une même paire possèdent dès le départ une polarisation bien définie \mathbf{p} repérée par l'angle λ entre cette polarisation (perpendiculaire à \mathbf{Oz}) et l'axe \mathbf{Ox} . L'orientation λ varie d'une paire à l'autre, et nous prendrons pour λ une variable aléatoire équipartie entre 0 et 2π , caractérisée par une densité de probabilité

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi}. \quad (2C.34)$$

Nous modélisons la mesure par un polariseur I orienté suivant \mathbf{a} (faisant un angle θ_I avec \mathbf{Ox}) en introduisant une fonction

$$A(\lambda, \mathbf{a}) = \text{signe} \left(\cos 2(\theta_I - \lambda) \right) \quad (2C.35)$$

qui vaut +1 si la valeur absolue de l'angle entre la polarisation \mathbf{p} et la direction d'analyse \mathbf{a} (modulo π) est inférieure à $\pi/4$, et -1 si cet angle est compris entre $\pi/4$ et $\pi/2$ (figure 2C.4). On adopte un modèle identique pour un polariseur II orienté suivant θ_{II} :

$$B(\lambda, \mathbf{b}) = \text{signe} \left(\cos 2(\theta_{II} - \lambda) \right) \quad (2C.36)$$

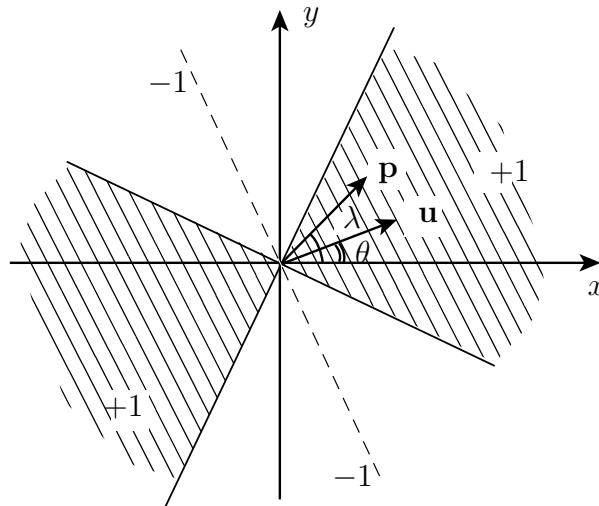


FIG. 2C.4: **Modèle à paramètre supplémentaire** dans lequel chaque photon possède une polarisation déterminée \mathbf{p} , caractérisée par l'angle λ avec \mathbf{Ox} . La mesure de polarisation suivant \mathbf{a} (angle θ avec \mathbf{Ox}) donne +1 si $0 \leq |\theta - \lambda| \leq \pi/4$ modulo π (zone hachurée), et -1 si $\pi/4 \leq |\theta - \lambda| \leq \pi/2$ modulo π (zone non hachurée).

Il est facile de montrer que ce modèle prédit de nombreux résultats identiques aux prédictions quantiques pour les paires EPR. Par exemple, les probabilités simples $P_+(\mathbf{a}), P_-(\mathbf{a}), P_+(\mathbf{b})$ et $P_-(\mathbf{b})$ valent toutes $1/2$ (cf. (2C.19)-(2C.21)). De plus, le coefficient de corrélation a une période π , et on obtient sans difficulté

$$\begin{aligned} E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \int_0^{2\pi} d\lambda \rho(\lambda) A(\lambda, \mathbf{a}) \cdot B(\lambda, \mathbf{b}) \\ &= 1 - 4 \frac{|\theta_I - \theta_{II}|}{\pi} \end{aligned} \quad (2C.37)$$

pour

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta_I - \theta_{II} \leq \frac{\pi}{2}. \quad (2C.38)$$

La figure (2C.5) permet de comparer le résultat (2C.37-2C.38) à la prédiction quantique (2C.28). On constate que le modèle à paramètres supplémentaires reproduit exactement les corrélations totales prédites par la mécanique quantique pour les polariseurs parallèles ou perpendiculaires, et donne des valeurs assez proches des prédictions quantiques pour les autres orientations. On peut se demander s'il est possible de raffiner le modèle – par exemple en choisissant des formes moins simplistes pour la réponse $A(\lambda, \theta)$ des polariseurs, afin d'obtenir des résultats exactement en accord avec les prédictions quantiques pour toutes les orientations des polariseurs. La réponse à cette question est donnée par le théorème de Bell : elle est négative !

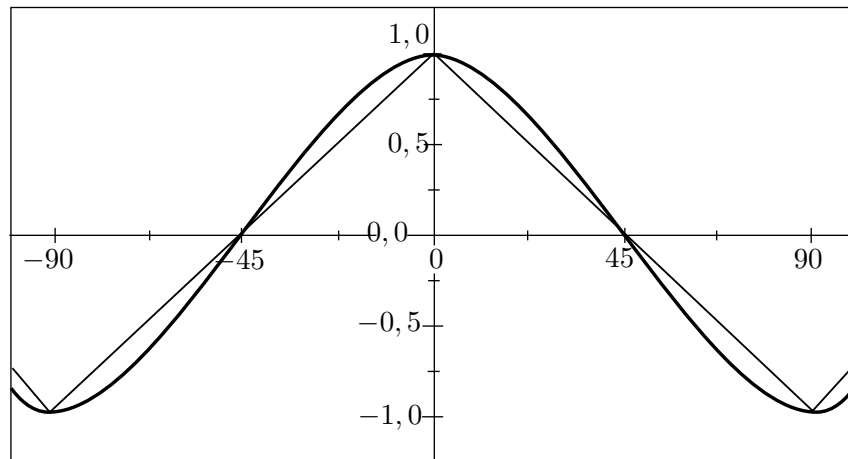


FIG. 2C.5: **Coefficient de corrélation de polarisation en fonction de l'angle entre polariseurs.** La figure permet de comparer les résultats du calcul quantique (trait épais) à ceux du modèle à paramètres supplémentaires du texte (trait fin). On constate que les prédictions des deux modèles sont identiques pour des polariseurs parallèles, perpendiculaires, ou à 45 degrés l'un de l'autre, et qu'elles restent voisines aux angles intermédiaires.

2C.3 Le théorème de Bell

2C.3.1 Inégalités de Bell

Le raisonnement de Bell, que nous allons présenter ici, à l'immense intérêt d'être général. Il s'applique à toute théorie locale à paramètres supplémentaires (TLPS), pas seulement au modèle que nous avons donné ci-dessus à titre d'exemple. Dans l'esprit du raisonnement EPR, on souhaite rendre compte des corrélations de polarisation entre les deux photons d'une même paire en introduisant un paramètre λ , commun aux deux photons d'une même paire, et qui changera aléatoirement d'une paire à l'autre. On le décrit comme une variable aléatoire caractérisée par une densité de probabilité $\rho(\lambda)$, définie positive, c'est-à-dire que

$$\rho(\lambda) \geq 0, \quad (2C.39)$$

$$\int d\lambda \rho(\lambda) = 1. \quad (2C.40)$$

Par ailleurs, on décrit les mesures de polarisation I et II, sur des photons portant le paramètre λ , à l'aide de fonctions $A(\lambda, \mathbf{a})$ et $B(\lambda, \mathbf{b})$ qui ne peuvent prendre que des valeurs $+1$ ou -1 :

$$|A(\lambda, \mathbf{a})| = |B(\lambda, \mathbf{b})| = 1. \quad (2C.41)$$

On suppose qu'il y a autant de chance d'avoir $+1$ que -1 pour chaque mesure de polarisation, c'est-à-dire que

$$\int d\lambda \rho(\lambda) A(\lambda, \mathbf{a}) = \int d\lambda \rho(\lambda) B(\lambda, \mathbf{b}) = 0. \quad (2C.42)$$

Il est alors clair que le coefficient de corrélation de polarisation, défini de la façon habituelle (2C.25), s'écrit dans un tel modèle

$$E_{\text{TLPS}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \overline{A(\lambda, \mathbf{a}) \cdot B(\lambda, \mathbf{b})} = \int d\lambda \rho(\lambda) A(\lambda, \mathbf{a}) B(\lambda, \mathbf{b}). \quad (2C.43)$$

Les inégalités de Bell vont s'appliquer à tout modèle à variable supplémentaire relevant du formalisme ci-dessus, quelle que soit la forme particulière des fonctions $A(\lambda, \mathbf{a})$, $B(\lambda, \mathbf{b})$, ou $\rho(\lambda)$, dès l'instant où elles satisfont aux propriétés (2C.39-2C.42). Pour les démontrer, considérons la quantité

$$\begin{aligned} s(\lambda, \mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}') &= A(\lambda, \mathbf{a}) \cdot B(\lambda, \mathbf{b}) - A(\lambda, \mathbf{a}) \cdot B(\lambda, \mathbf{b}') \\ &\quad + A(\lambda, \mathbf{a}') \cdot B(\lambda, \mathbf{b}) + A(\lambda, \mathbf{a}') \cdot B(\lambda, \mathbf{b}'). \end{aligned} \quad (2C.44)$$

On peut la factoriser sous la forme

$$\begin{aligned} s(\lambda, \mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}') &= A(\lambda, \mathbf{a}) \left(B(\lambda, \mathbf{b}) - B(\lambda, \mathbf{b}') \right) \\ &\quad + A(\lambda, \mathbf{a}') \left(B(\lambda, \mathbf{b}) + B(\lambda, \mathbf{b}') \right). \end{aligned} \quad (2C.45)$$

En tenant compte de (2C.41), on se convainc aisément que

$$s(\lambda, \mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}') = \pm 2, \quad (2C.46)$$

quelle que soit la valeur de λ . Il suffit de noter qu'on a soit $B(\lambda, \mathbf{b}) = B(\lambda, \mathbf{b}')$ soit $B(\lambda, \mathbf{b}) = -B(\lambda, \mathbf{b}')$. Si on moyenne sur λ , la relation (2C.46) on a donc une quantité comprise entre -2 et $+2$:

$$-2 \leq \int d\lambda \rho(\lambda) s(\lambda, \mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}') \leq +2. \quad (2C.47)$$

En utilisant (2C.43), on voit apparaître quatre valeurs du coefficient de corrélation, pris pour les quatre orientations (\mathbf{a}, \mathbf{b}) , $(\mathbf{a}, \mathbf{b}')$, $(\mathbf{a}', \mathbf{b})$ et $(\mathbf{a}', \mathbf{b}')$, qui sont contraintes par les inégalités

$$-2 \leq S(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}') \leq 2 \quad (2C.48)$$

avec

$$\implies S = E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + E(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + E(\mathbf{a}', \mathbf{b}'). \quad (2C.49)$$

Nous venons ainsi d'établir une forme particulièrement utile des inégalités de Bell. Ces inégalités contraignent toute corrélation qu'il est possible d'écrire comme en (2C.43), les quantités $A(\lambda, \mathbf{a})$, $B(\lambda, \mathbf{b})$ et $\rho(\lambda)$ pouvant prendre n'importe quelle forme compatible avec (2C.39)-(2C.42).

Remarques

(i) La démonstration ci-dessus n'est pas limitée au cas des variables λ scalaires. La nature mathématique de λ importe peu dès l'instant où on peut écrire les équations (2C.39)-(2C.41).

(ii) Les inégalités de Bell originales n'étaient valables que dans le cas où $E(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 1$. L'avantage des inégalités du type (2C.48)-(2C.49), appelées CHSH d'après le nom de leurs auteurs [voir note 4], ont le grand avantage d'être directement utilisables pour un test expérimental où on n'a jamais rigoureusement $E(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 1$.

(iii) La démonstration des inégalités de Bell n'est pas limitée au cas où la relation entre λ et le résultat de mesure est déterministe (fonction $A(\lambda, \mathbf{a})$). Les inégalités s'appliquent aussi au cas où la relation entre λ et le résultat de mesure est de type probabiliste, c'est-à-dire que l'on peut définir des probabilités $p_{\pm}(\lambda, \mathbf{a})$ d'obtenir le résultat ± 1 .

2C.3.2 Conflit avec la mécanique quantique

Les inégalités de Bell sont très générales : elles s'appliquent à tout modèle dans lequel on rend compte des corrélations de polarisation en introduisant des paramètres supplémentaires, dans l'esprit des idées d'Einstein. Mais il se trouve que les corrélations de polarisation (2C.28) prévues par la mécanique quantique pour des photons dans l'état EPR (2C.15) violent ces inégalités pour certaines valeurs des orientations. Cette violation peut être considérable, comme nous le montrons maintenant.

Considérons en effet les orientations $(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}'_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}'_0)$ indiquées sur la figure 2C.6, telles que

$$(\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0) = (\mathbf{b}_0, \mathbf{a}'_0) = (\mathbf{a}'_0, \mathbf{b}'_0) = \frac{\pi}{8}, \quad (2C.50)$$

et donc

$$(\mathbf{a}_0, \mathbf{b}'_0) = \frac{3\pi}{8}. \quad (2C.51)$$

On trouve alors, en utilisant (2C.28), que pour l'état EPR, la Mécanique Quantique prédit pour la quantité S une valeur

$$S_{MQ}(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}'_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}'_0) = 2\sqrt{2} = 2.828\dots \quad (2C.52)$$

manifestement en contradiction avec (2C.48), c'est-à-dire violant la limite supérieure de (2C.48) de façon considérable.

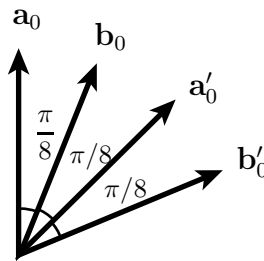


FIG. 2C.6: **Violation maximale des inégalités de Bell.** Pour le jeu d'orientations $\{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}'_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}'_0\}$ des polariseurs I et II telles que $(\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0) = (\mathbf{b}_0, \mathbf{a}'_0) = (\mathbf{a}'_0, \mathbf{b}'_0) = \pi/8$, la quantité S_{MQ} prévue par la Mécanique Quantique prend la valeur $2\sqrt{2}$, bien plus grande que la limite supérieure des inégalités (4).

Ce résultat a une portée conceptuelle que l'on ne saurait surestimer. La violation des inégalités de Bell par les prédictions quantiques démontre explicitement que *les corrélations quantiques EPR sont d'une nature irréductible aux concepts classiques* qui ont conduit aux inégalités. Ces concepts sont tellement naturels, lorsqu'on a affaire à des corrélations entre objets classiques, que leur faillite est particulièrement étonnante. C'est par exemple au terme d'un raisonnement identique à celui qui a conduit à introduire des paramètres supplémentaires que les biologistes, observant que les vrais jumeaux possèdent des caractéristiques identiques (couleur de cheveux, couleur des yeux, groupe sanguin, type d'histocompatibilité), ont conclu que ces caractéristiques sont déterminées par des chromosomes, identiques pour les deux jumeaux d'une même paire, et cela bien avant que l'on ait observé les chromosomes au microscope électronique. À la lumière du théorème de Bell, on est forcé de constater que ce type de raisonnement ne s'applique pas aux corrélations quantiques de type EPR.

L'autre conséquence, tout aussi importante, du théorème de Bell, est la possibilité de *trancher par l'expérience le débat entre Einstein et Bohr*. Il suffit en principe de mesurer

les corrélations dans une situation où la mécanique quantique prédit une violation des inégalités de Bell pour savoir s'il faut renoncer à une interprétation « à la Einstein », ou si au contraire on a identifié une situation où la mécanique quantique est prise en défaut (c'est le destin normal des théories physiques de rencontrer un jour une limite de validité).

2C.3.3 Condition de localité et causalité relativiste : expérience avec polariseurs variables

Ayant identifié une contradiction entre les prédictions quantiques et tout modèle à paramètres supplémentaires tentant de compléter la mécanique quantique conformément au programme EPR, on doit s'interroger sur les raisons profondes de ce conflit. Quelles sont les hypothèses, explicites ou implicites, nécessaires pour obtenir les inégalités de Bell ? Avec quarante ans de recul, et après des centaines d'articles consacrés à la question, il semble possible de conclure que deux hypothèses suffisent :

(i) l'introduction de paramètres supplémentaires communs pour expliquer les corrélations entre mesures portant sur des systèmes séparés ;

(ii) l'hypothèse de localité, soulignée par Bell dès son premier article.

Dans le contexte de l'expérience de pensée de la figure 2C.3, l'*hypothèse de localité* stipule que le résultat de la mesure par un polariseur (par exemple le polariseur I) ne peut pas dépendre de l'orientation (\mathbf{b}) de l'autre polariseur (II) – et réciproquement une mesure en II ne peut pas être influencée par l'orientation \mathbf{a} de I. De même, l'état des photons lors de leur émission ne saurait dépendre des orientations \mathbf{a} et \mathbf{b} des polariseurs qui effectueront ultérieurement les mesures sur ces mêmes photons.

Nous avons implicitement admis cette hypothèse en écrivant les formes $\rho(\lambda)$, $A(\lambda, \mathbf{a})$ et $B(\lambda, \mathbf{b})$ pour décrire l'émission des paires de photons, ou la réponse des polariseurs. Ainsi, la fonction $A(\lambda, \mathbf{a})$ décrivant la mesure par le polariseur I, ne dépend manifestement pas de l'orientation \mathbf{b} du polariseur II éloigné ; et de même $B(\lambda, \mathbf{b})$ ne dépend pas de \mathbf{a} . De façon analogue, la distribution de probabilité $\rho(\lambda)$ des paramètres sur les paires, au moment de leur émission, ne dépend pas des orientations \mathbf{a} ou \mathbf{a}' , \mathbf{b} ou \mathbf{b}' , des polariseurs qui effectueront la mesure. Ces conditions de localité sont indispensables pour obtenir les inégalités de Bell. Il est en effet facile de vérifier, en reprenant la démonstration, que si par exemple on autorisait la réponse du polariseur I à dépendre de \mathbf{b} , en l'écrivant $A(\lambda, \mathbf{a}, \mathbf{b})$, alors on ne pourrait pas démontrer que la quantité $s(\lambda, \mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}')$ vaut ± 2 .

Pour naturelle qu'elle soit, la condition de localité ne découle d'aucune loi fondamentale : comme Bell le faisait remarquer, rien n'interdit qu'une interaction inconnue permette à l'orientation du polariseur II d'influencer le polariseur I. Mais Bell ajoutait aussitôt que si on pouvait réaliser *une expérience dans laquelle les orientations des polariseurs sont modifiées rapidement* pendant la propagation des photons entre la source et les polariseurs, alors c'est la *causalité relativiste* d'Einstein qui interdirait l'existence d'une telle interaction (voir figure 2C.7). En effet, aucune interaction ne pouvant se propager plus

vite que la lumière, l'information sur la valeur de l'orientation du polariseur II au moment de la mesure n'arrivera pas à temps en I pour influencer la mesure. De façon encore plus évidente, dans une telle expérience de pensée, l'état initial des photons au moment de leur préparation dans la source ne peut pas dépendre des orientations que les polariseurs n'ont pas encore mais qu'ils auront au moment de la mesure. Avec un tel schéma, la *condition de localité* (condition (ii) ci-dessus) n'est plus une hypothèse, elle *devient une conséquence de la causalité relativiste d'Einstein*.

Ainsi, dans l'expérience de pensée de la figure 2C.7, on teste l'ensemble des idées qu'Einstein ne cessa de mettre en avant dans le contexte des corrélations EPR : d'une part la possibilité (ou même pour Einstein la nécessité) de compléter le formalisme quantique ; d'autre part l'impossibilité d'une interaction directe entre événements séparés par un « intervalle relativiste du genre espace », c'est-à-dire tels qu'aucun signal ne peut se propager de l'un à l'autre à une vitesse inférieure ou égale à celle de la lumière. **C'est donc bien le conflit entre une certaine vision du monde défendue par Einstein et la mécanique quantique que l'on va mettre à l'épreuve dans les expériences de tests des inégalités de Bell.**

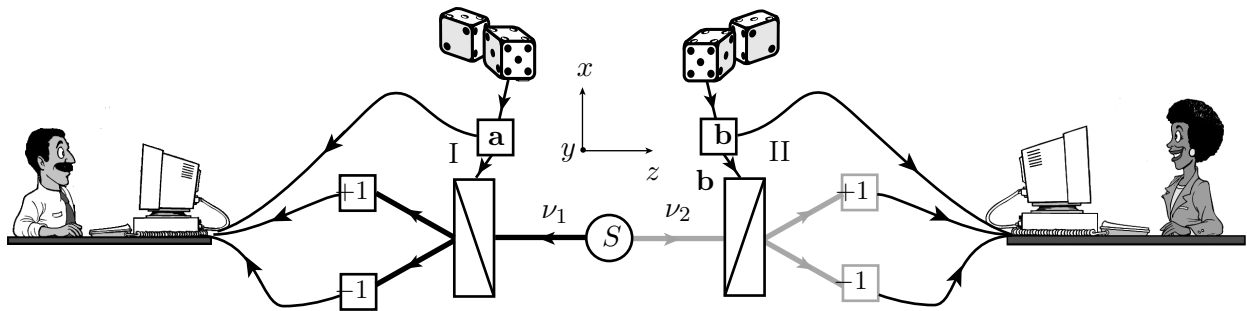


FIG. 2C.7: *Expérience de pensée avec polariseurs variables*. S'il est possible de modifier aléatoirement les orientations \mathbf{a} et \mathbf{b} des polariseurs I et II pendant le temps de propagation des photons entre la source et les polariseurs, alors la condition de localité de Bell devient une conséquence de la causalité relativiste d'Einstein. Pour souligner la séparation entre les opérations de mesure, on a indiqué qu'il est possible d'enregistrer séparément à chaque poste de mesure les données suivantes : le résultat de la mesure de polarisation, l'orientation du polariseur au moment où il a donné ce résultat, et la date de ce résultat. La corrélation sera déterminée a posteriori par comparaison entre les résultats obtenus au même instant aux deux postes de mesure.

2C.4 Le recours à l'expérience. Violation des inégalités de Bell

De façon surprenante, malgré des décennies de résultats expérimentaux en accord avec la théorie quantique, on ne disposait en 1964 d'aucun résultat permettant un test des inégalités de Bell. On s'aperçut que les situations dans lesquelles la théorie prévoyait

une violation des inégalités de Bell (situations « sensibles ») étaient extrêmement rares, et il fallut donc imaginer des situations sensibles réalisables avec les moyens expérimentaux de l'époque. En 1969, l'article de J. Clauser, M. Horne, A. Shimony et R. Holt [voir note 4] montra que la paire de photons visibles produits dans la désexcitation d'un atome sautant de niveau en niveau (cascade radiative) pouvait constituer un bon candidat, à condition de bien choisir les niveaux (cf. le complément 3C).

Sous l'impulsion de cet article, des expériences pionnières virent le jour dès le début des années 1970, montrant la possibilité de créer des paires de photons intriqués, même si la très faible efficacité des sources lumineuses rendait ces expériences extrêmement difficiles. On ne s'étonnera donc pas que les premiers tests des inégalités de Bell aient donné des résultats quelque peu contradictoires, avec pourtant un avantage à la Mécanique Quantique, mais cela dans des schémas expérimentaux encore éloignés de l'expérience de pensée idéale. Il fallut attendre la fin des années 1970 pour que les progrès des lasers permettent le développement d'une source de photons intriqués d'une intensité sans précédent (Figure 2C.8). Il devint alors possible de mettre en œuvre des schémas expérimentaux beaucoup plus proches de l'expérience de pensée. En 1982, la première expérience mettant en œuvre des séparateurs de polarisation à deux voies de sortie⁹ permettait un test des inégalités de Bell dans un schéma identique à celui de l'expérience de pensée de la Figure (2C.3). Le résultat obtenu viole de façon spectaculaire la limite supérieure des inégalités de Bell (2C.48). Ce résultat est en excellent accord avec la prédiction quantique prenant en compte les imperfections résiduelles des polariseurs ($S_{MQ} = 2.70 \pm 0.005$). On notera que cette valeur est proche de la valeur maximale $S_{MQ}^{\max} = 2\sqrt{2} = 2.828\dots$ qui serait obtenue dans une expérience idéale (équation 2C.52).

En éloignant les polariseurs de part et d'autre de la source, on peut effectuer des mesures séparées par un intervalle du genre espace : il suffit pour cela que les détections conjointes soient séparées d'un intervalle de temps plus court que les 40 nanosecondes nécessaires à la lumière pour parcourir les 12 mètres qui séparent les polariseurs. L'expérience montre que les corrélations restent aussi fortes, et continuent à violer les inégalités de Bell, en contradiction avec certaines spéculations théoriques. Mais surtout, on peut mettre en œuvre un schéma où les directions d'analyse de polarisation sont modifiées à une échelle de temps (10 nanosecondes) courte devant les 40 nanosecondes séparant (au sens relativiste) les deux zones de mesure. Cette expérience, qui se rapproche du schéma de la figure (2C.7) où la condition de localité est une conséquence de la relativité d'Einstein, donne une violation nette des inégalités de Bell, par 6 écarts-type¹⁰.

Vers la fin des années 1980, on commença à développer une troisième génération de sources de paires de photons intriqués, basées sur des effets d'optique non linéaire non plus dans des atomes comme la source de la figure (2C.8), mais dans des cristaux non-linéaires (voir le chapitre 6). Le progrès majeur qui en résulte est la maîtrise de la direction d'émission des photons intriqués, ce qui permet d'injecter les deux membres de chaque

⁹A. Aspect, P. Grangier and G. Roger, *Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment : A New violation of Bell's Inequalities*, Phys. Rev. Lett. **49**, 91 (1982).

¹⁰A. Aspect, J. Dalibard and G. Roger, *Experimental Test of Bell's Inequalities Using Variable Analyzers*, Phys. Rev. Lett. **49**, 1804 (1982).

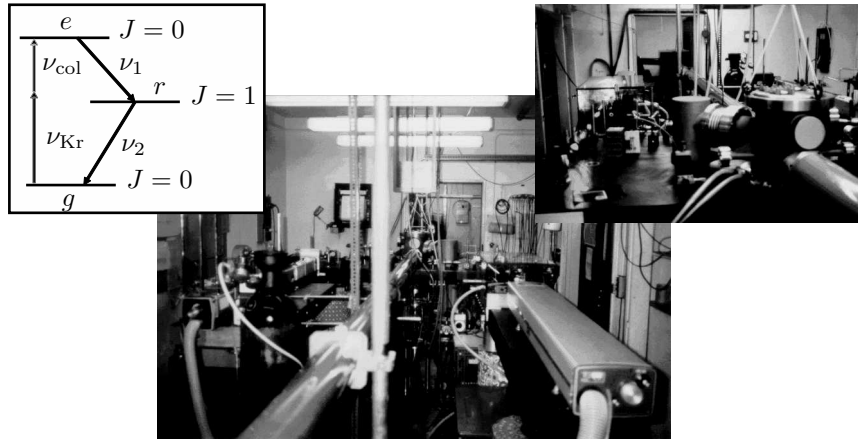


FIG. 2C.8: *Source de paires de photons intriqués.* On distingue les lasers permettant d'exciter les atomes de Calcium dans le niveau e (par absorption non linéaire des deux photons ν_{Kr} et ν_{col}). Par désexcitation en cascade vers r puis g , l'atome émet la paire de photons intriqués ν_1 et ν_2 . Cette source d'une efficacité sans précédent a permis d'effectuer des mesures de corrélation de polarisation avec une précision de 1% en moins de 2 minutes, autorisant la mise en oeuvre de schémas expérimentaux nouveaux de plus en plus proches de l'expérience de pensée. Les photons étaient émis dans des faisceaux opposés, peu divergents, de quelques centimètres de diamètre seulement, ce qui a permis d'éloigner les polariseurs à 6 mètres de la source de photons située dans l'enceinte à vide qu'on distingue au centre de la photo. Avec cette géométrie, un signal se propageant à la vitesse de la lumière mettrait 40 nanosecondes pour aller d'un polariseur à l'autre, ce qui assure la séparation relativiste des mesures (séparées au plus de 10 ns). (Document Institut d'Optique, Orsay).

paire dans deux fibres optiques dirigées vers des directions opposées. On a ainsi pu réaliser des expériences avec des distances de source à détecteur de plusieurs centaines de mètres, voire de dizaines de kilomètres comme dans l'expérience¹¹ qui utilise le réseau commercial de fibres optiques de la compagnie suisse de télécommunications (figure 2C.9).

Avec de telles distances entre source et stations de mesure, il devient possible de choisir de façon vraiment aléatoire l'orientation de chaque polariseur pendant le temps de propagation des photons depuis la source, ce qui n'était pas complètement le cas dans l'expérience de la note [11]. Une telle expérience, suivant exactement le schéma de la figure 2C.7 a été réalisée en 1999 (figure 2C.10), confirmant sans ambiguïté la violation des inégalités de Bell dans une situation où la condition de localité est une conséquence de la causalité relativiste¹².

Avec la croissance de l'intérêt pour le phénomène d'intrication, on a vu apparaître de

¹¹W. Tittel, J. Brendel, H. Zbinden, and N. Gisin : *Violation of Bell inequalities by photons more than 10 km apart*, Phys. Rev. Lett. **81**, 3563 (1998).

¹²G. Weilh, T. Jennewein, C. Simon, H. Weinfurter, and A. Zeilinger : *Violation of Bell's inequality under strict Einstein locality condition*, Phys. Rev. Lett. **81**, 5039 (1998).

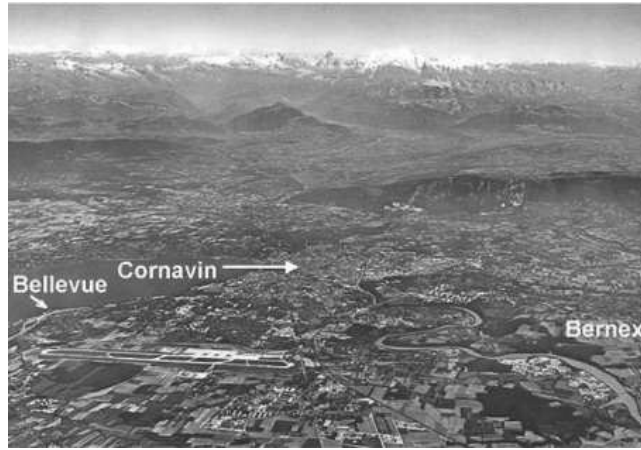


FIG. 2C.9: *Intrication à plus de 10 kilomètres.* Dans cette expérience les photons intriqués se propagent dans les fibres optiques du réseau commercial de télécommunication. La source (située à Cornavin) est à plus de dix kilomètres des détecteurs (Bellevue et Bernex). (Document université de Genève).

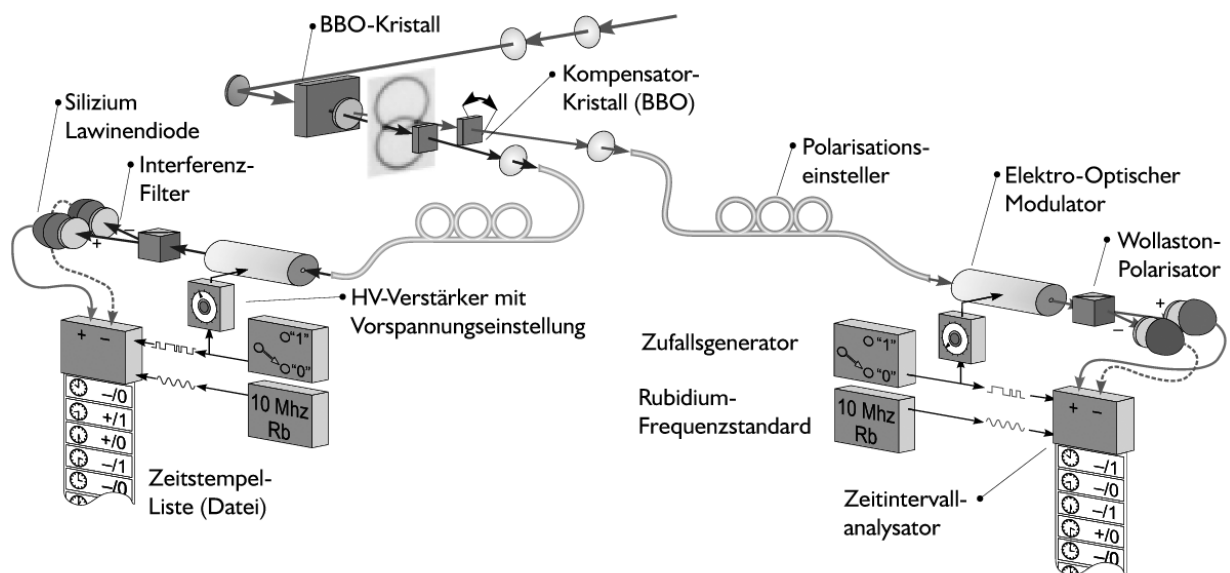


FIG. 2C.10: *Expérience avec polariseurs variables aléatoires.* La distance entre source et polariseurs (plus de 300 mètres de fibre optique) est suffisante pour permettre un tirage aléatoire de l'orientation de chaque polariseur, pendant le temps de propagation des photons (de l'ordre de une microseconde). (Document université d'Innsbruck).

nouveaux systèmes intriqués sur lesquels ont pu être réalisés des tests des inégalités de Bell présentant des caractéristiques différentes, par exemple une expérience où on intrique les états internes de deux ions¹³.

¹³M. A. Rowe et al., Nature 409, 791 (2001) : *Experimental violation of a Bell's inequality with efficient*

On dispose aujourd'hui d'un ensemble impressionnant de données expérimentales qui violent sans ambiguïté les inégalités de Bell, dans des schémas extrêmement variés, permettant de clore séparément les diverses échappatoires qui ont pu être envisagées¹⁴. De plus, il faut noter que ces expériences ont non seulement montré une violation non ambiguë des inégalités de Bell, mais aussi permis de confronter avec une très grande précision les résultats de mesure aux prédictions de la Mécanique Quantique, parfaitement précises dès lors que les situations expérimentales sont bien contrôlées. L'accord observé est incontestable. Nous pouvons considérer que les inégalités de Bell ont été violées, que les prédictions quantiques stupéfiantes relatives aux systèmes intriqués ont été confirmées, et essayer d'en tirer les conséquences.

2C.5 Conclusion de la non localité quantique à l'information quantique

Quelle conclusions tirer de la violation des inégalités de Bell? Tout d'abord nous devons accepter l'idée qu'un système intriqué ne peut pas se concevoir comme formé de sous-systèmes séparés, dont les propriétés physiques seraient définies localement et ne sauraient s'influencer mutuellement lorsque les systèmes sont séparés au sens relativiste. Cette notion de « séparabilité » semblait pourtant tellement fondamentale à Einstein qu'il en avait fait la pierre angulaire de sa démonstration de la nécessité de compléter la Mécanique Quantique : « On peut échapper à cette conclusion [la Mécanique Quantique est incomplète] seulement en acceptant que la mesure de S1 change la situation réelle de S2 (par télépathie) ou en niant l'indépendance des situations réelles de tels objets, spatialement séparés l'un de l'autre. Les deux termes de l'alternative me semblent également inacceptables »¹⁵. Aujourd'hui, avec la violation des inégalités de Bell, nous ne pouvons plus rejeter cette alternative, et il nous faut renoncer à la vision « réaliste locale » du monde que défendait Einstein.

On a parfois pu se demander quel était le concept à abandonner, entre la localité d'une part, et le réalisme de l'autre. Il nous semble pour notre part difficile d'envisager ces deux notions comme indépendantes : comment concevoir des réalités physiques indépendantes pour deux systèmes séparés spatialement mais qui resteraient en contact via une interaction instantanée, supraluminale? *Pour nous, la non localité de la Mécanique Quantique –*

detection. Dans cette expérience, le rendement de détection est proche de 100%, à la différence des expériences avec les photons citées ici. L'expérience avec les ions a donc permis d'éliminer un moyen de réconcilier variables cachées et mécanique quantique connue sous le nom « d'échappatoire de sensibilité ».

¹⁴Dans la mesure ou aucune expérience n'a à la fois clos l'échappatoire de sensibilité et mis en œuvre des mesures séparées au sens relativiste, il est possible, si on veut pousser l'argumentation logique à ses limites, de soutenir que les expériences réalisées à ce jour ne sont pas totalement concluantes. Pour connaître l'état de l'art sur ce point en 2004, voir par exemple : R. Garcia-Patron, J. Fiurášek, N.J. Cerf, J. Wenger, R. Tualle-Brouri, and Ph. Grangier *Proposal for a Loophole-Free Bell Test Using Homodyne Detection* Phys. Rev. Lett. **93**, 130409 (2004).

¹⁵« A. Einstein in « *A. Einstein Philosophy scientist* », Open court and Cambridge university Press (1949).

souvent présentée comme la conclusion à tirer de la violation des inégalités de Bell – correspond à une négation en bloc de la vision réaliste locale du monde : les photons intriqués jumeaux ne sont pas deux systèmes distincts portant deux copies identiques d'un même ensemble de paramètres. Une paire de photons intriqués doit être considérée comme un système unique, inséparable, décrit par un état quantique global, impossible à décomposer en deux états relatifs à chacun des deux photons : les propriétés de la paire ne se résument pas à la réunion des propriétés des deux photons. Pour souligner cette caractéristique du formalisme quantique, qui contraste avec une conception réaliste locale, on peut parler de « holisme quantique »¹⁶.

Soulignons ici qu'une utilisation insuffisamment précautionneuse de l'expression « non localité » pourrait amener, à tort, à conclure à la possibilité de l'envoi d'un signal utilisable à une vitesse supérieure à celle de la lumière. Reprenant le schéma de la figure 2C.7, on pourrait en effet imaginer qu'une mesure par le polariseur II de la polarisation du photon ν_2 permet de connaître instantanément la direction du polariseur I qui vient juste d'effectuer une mesure sur le photon ν_1 . Supposons par exemple qu'une mesure sur ν_1 , effectuée suivant la direction \mathbf{a} , donne le résultat $+1$. On peut alors, comme nous l'avons vu, dire que le photon ν_2 prend instantanément, au moment de la mesure de ν_1 , une polarisation linéaire parallèle à \mathbf{a} . Ne peut-on prendre ainsi connaissance en II, instantanément, de la valeur de l'orientation \mathbf{a} qui pourrait être choisie au dernier moment en I? On aurait ainsi transmis une information (l'orientation \mathbf{a}), plus vite que la lumière. En fait, l'examen des formules (2C.16-2C.21) montre que ce ne sont pas les résultats des mesures simples en II qui dépendent de l'orientation \mathbf{a} de I, mais les mesures conjointes. Pour détecter le changement de direction de I, l'observateur en II doit comparer ses propres mesures à celles effectuées en I. Or le résultat de ces dernières est une donnée classique, qui ne peut lui être communiquée que par un canal classique connectant I à II, où l'information ne circule pas plus vite que la lumière. Ce n'est qu'après avoir reçu ces données (qui en elles même ne donnent pas l'information désirée) que l'observateur en II peut déterminer la valeur de \mathbf{a} ¹⁷.

En fait, le raisonnement ci-dessus repose sur l'impossibilité de déterminer complètement par la mesure l'état quantique d'un système unique (ici de connaître la polarisation de photon ν_2). Pour déterminer complètement l'état d'un système, il faudrait être capable d'en préparer un grand nombre de copies, toutes exactement dans le même état, et de multiplier les mesures en changeant d'observable (ici avec une série de polariseurs orientés différemment). Mais en fait il est impossible de dupliquer un système quantique, c'est à dire d'obtenir deux systèmes strictement dans le même état que le système initial : c'est le « théorème de non clonage quantique »¹⁸. On ne peut donc connaître l'orientation de l'état de polarisation de ν_2 , et il faut renoncer au rêve, cher aux auteurs de science fiction,

¹⁶P. Grangier, « *Contextual Objectivity and quantum holism* », arXiv : quant- ph/ 0301001.

¹⁷Un schéma de même nature est à l'œuvre dans le processus de « téléportation quantique », qui permet de transférer un état quantique d'un système à un autre (C.H. Bennett et al., « *Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels* », Phys. Rev. Lett. **70**, 1895-1899 (1993) : si une étape du processus semble être instantanée, l'opération n'est achevée qu'après la transmission d'une information via un canal classique.

¹⁸W.K. Wothers et W.H. Zurek, *Nature* **299**, 802 (1982).

d'un télégraphe supra luminal.

À l'issue d'un voyage qui nous a mené de l'article EPR (1935) aux inégalités de Bell (1964) et aux expériences qu'elles ont suscitées, on pourrait avoir le sentiment frustrant d'une série de conclusions négatives : les propriétés avérées de l'intrication quantique nous forcent à renoncer à une vision réaliste locale ; le théorème de non clonage quantique interdit le télégraphe supra luminal... En fait, ces renoncements sont porteurs de progrès potentiels : on commence à savoir tirer partie des propriétés quantiques que nous venons de voir, dans des concepts nouveaux de traitement et de transmission de l'information, où l'intrication quantique et le théorème de non clonage jouent un rôle central : c'est le domaine de l'information quantique, en plein essor depuis les années 1990.

Chapitre 3

Interaction d'un atome avec le champ électromagnétique quantifié

Le chapitre précédent nous ayant permis d'introduire la quantification du champ électromagnétique, nous sommes en mesure de reprendre la question de l'interaction entre un atome et le champ électromagnétique, les deux systèmes étant maintenant décrits dans le formalisme quantique.

Cette approche complètement quantique a d'abord le mérite de la cohérence théorique. On peut en effet montrer¹ que le traitement semi-classique du chapitre I du cours « Optique Quantique 1 », dans lequel l'atome est un objet quantique et le champ est un objet classique, présente certaines incohérences. Par exemple, les relations de commutation fondamentales n'y sont pas préservées. Ici au contraire l'ensemble formé par l'atome et le champ électromagnétique est un système quantique unique, dont l'évolution est traitée de façon globale, et cette description est par nature cohérente.

Au-delà de cet intérêt, important mais qui pourrait apparaître seulement académique, l'approche totalement quantique va nous permettre de traiter le problème fondamental de l'*émission spontanée* de lumière par un atome isolé. Rappelons que cette question échappe au traitement semi-classique utilisé dans le cours « Optique Quantique 1 », dans lequel on a été obligé d'introduire phénoménologiquement la notion de durée de vie d'un niveau atomique. Ici, l'émission spontanée apparaîtra naturellement lorsque nous considérerons le système formé d'un atome excité et du champ électromagnétique quantifié dans son état fondamental, le vide. Ce système évolue, sous l'effet de son hamiltonien, vers un état final où l'atome est passé dans l'état fondamental et le champ électromagnétique contient un photon. La description de cette évolution, entre un état discret et un continuum, est traitée avec les méthodes présentées au chapitre 1 du cours « Optique Quantique 1 ».

L'approche complètement quantique a également le mérite de permettre une interprétation simple de processus d'interaction déjà étudiés : *absorption*, *émission induite*,

¹Voir par exemple CDG 2, Complément A.IV.

diffusions, processus non-linéaires. Un certain nombre de caractéristiques de ces processus (caractère résonnant, effet de recul de l'atome) se comprennent en effet très simplement en terme de conservation d'énergie et d'impulsion dans une collision atome-photon, c'est-à-dire dans l'interaction entre l'atome et le champ quantifié².

Ce chapitre débute par une présentation détaillée de l'hamiltonien d'interaction entre l'atome et le champ quantifié (Partie 3.1). Dans la partie 3.2, nous montrons comment cet hamiltonien d'interaction rend compte de divers processus d'interaction en terme d'échanges de photons entre l'atome et le rayonnement. Puis nous retrouvons l'oscillation de Rabi, qui est maintenant due à l'évolution interne du système isolé formé de l'atome et du rayonnement. Dans la partie 3.3, nous utilisons le formalisme pour décrire l'*émission spontanée* d'un atome isolé, et nous calculons explicitement la *durée de vie radiative* d'un niveau atomique. Il s'agit d'un des résultats les plus importants de ce cours. Enfin, dans la partie 3.4, nous présentons quelques *processus de diffusion de photons par un atome* (diffusion Rayleigh, Thomson, résonnante, et Raman), processus caractérisés quantitativement par une *section efficace*. À titre d'exemple, nous faisons le calcul explicite de la section efficace de diffusion Thomson, situation dans laquelle un atome diffuse de façon élastique des photons de fréquence grande devant les fréquences de transition atomique. Nous retrouvons ainsi – par un traitement à la fois plus satisfaisant et dans une certaine mesure plus simple – la section efficace obtenue en électrodynamique classique à l'aide du modèle de l'électron élastiquement lié (Complément 1A).

Le complément 3A est consacré à un sujet très actif dans la recherche en optique quantique, « l'électrodynamique quantique en cavité ». Il s'agit d'un système modèle très fructueux pour étudier des phénomènes complexes comme la décohérence, ou l'intrication quantique. Le complément 3B présente un argument justifiant le succès du modèle semi-classique dans l'interaction atome-laser. Le complément 3C introduit une nouvelle forme de l'hamiltonien d'interaction entre un atome et le champ quantifié : il s'agit de l'hamiltonien dipolaire électrique, qui est très utilisé. Le complément 3D traite l'émission spontanée d'une paire de photons dans une « cascade radiative atomique ». On montre que certaines cascades donnent des paires de photons intriqués en polarisation, qui ont permis des tests convaincants des inégalités de Bell (complément 2C).

3.1 Hamiltonien d'interaction en jauge de Coulomb

3.1.1 Système total {Particules + Champ}

Au chapitre 1, nous avons établi l'expression classique (1.130) de l'hamiltonien d'un système constitué de charges (q_α, m_α) et du champ électromagnétique dans lequel on a

²De même, les règles de sélection reliant les transitions possibles à la polarisation de la lumière (cf. Cours « Optique Quantique 1 », Complément 2A) peuvent s'interpréter comme une conservation du moment cinétique du système atome-photon.

isolé la partie transverse $\mathbf{A}_\perp(\mathbf{r}, t)$ (rayonnement libre) :

$$H = \sum_\alpha \frac{1}{2m_\alpha} (\mathbf{p}_\alpha - q_\alpha \mathbf{A}_\perp(\mathbf{r}_\alpha, t))^2 + V_{\text{coul}} + H_{\text{trans}} . \quad (3.1a)$$

Dans cette expression, la quantité \mathbf{p}_α est reliée à la vitesse \mathbf{v}_α de la particule α par

$$\mathbf{p}_\alpha = m_\alpha \mathbf{v}_\alpha + q_\alpha \mathbf{A}_\perp(\mathbf{r}_\alpha, t) . \quad (3.1b)$$

L'énergie d'interaction coulombienne instantanée V_{coul} ne dépend que des positions \mathbf{r}_α des particules. L'hamiltonien du champ transverse H_{trans} a été utilisé au chapitre 2 pour quantifier le rayonnement.

Rappelons qu'en *jauge de Coulomb* le potentiel vecteur se réduit à sa partie transverse $\mathbf{A}_\perp(\mathbf{r}, t)$ et \mathbf{p}_α est alors l'*impulsion généralisée* de la particule α , qui donnera en théorie quantique l'opérateur $\hat{\mathbf{p}}_\alpha = -i\hbar\nabla$. Dans cette jauge, l'hamiltonien (3.1a) s'exprime donc simplement en fonction des variables dynamiques des charges ($\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha$) et du rayonnement $\mathbf{A}_\perp(\mathbf{r}_\alpha, t)$, ce qui permet un passage direct des expressions classiques aux expressions quantiques, en remplaçant chaque variable dynamique par l'opérateur quantique correspondant.

Dans l'hamiltonien quantique ainsi obtenu à partir de (3.1a), nous pouvons développer le carré, ce qui conduit à une forme :

$$\hat{H} = \hat{H}_P + \hat{H}_R + \hat{H}_I \quad (3.2)$$

Le premier terme

$$\hat{H}_P = \sum_\alpha \frac{\hat{\mathbf{p}}_\alpha^2}{2m_\alpha} + V_{\text{coul}} \quad (3.3a)$$

est l'hamiltonien des particules (indiquées par α), prenant en compte leur énergie cinétique et leur énergie coulombienne d'interaction. Le deuxième terme

$$\hat{H}_R = \sum_\ell \hbar\omega_\ell \left(\hat{a}_\ell^+ \hat{a}_\ell + \frac{1}{2} \right) \quad (3.3b)$$

est l'hamiltonien du rayonnement (Équation 2.24), c'est-à-dire la partie transverse du champ, qui est un système dynamique autonome en l'absence de charges. Il se présente comme une somme d'hamiltoniens associés aux divers modes ℓ du champ. (Rappelons qu'un mode d'onde progressive, que nous indexons par un indice dénombrable ℓ , est en fait caractérisé par quatre nombres : trois définissent les composantes du vecteur d'onde, c'est-à-dire une fréquence et une direction de propagation, et le quatrième caractérise la polarisation voir le paragraphe 1.2).

Le troisième terme de (3.2)

$$\hat{H}_I = - \sum_\alpha \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \hat{\mathbf{p}}_\alpha \cdot \hat{\mathbf{A}}_\perp(\hat{\mathbf{r}}_\alpha) + \sum_\alpha \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha} (\hat{\mathbf{A}}_\perp(\hat{\mathbf{r}}_\alpha))^2 \quad (3.4)$$

est un terme d'interaction qui décrit le couplage entre les particules (intervenant par leurs opérateurs impulsion $\hat{\mathbf{p}}_\alpha$ et position $\hat{\mathbf{r}}_\alpha$) et le rayonnement décrit par $\hat{\mathbf{A}}_\perp(\hat{\mathbf{r}}_\alpha)$ qui est l'opérateur potentiel vecteur en jauge de Coulomb, donné par la relation (2.26c) dans laquelle on a remplacé le paramètre \mathbf{r}_α par l'opérateur $\hat{\mathbf{r}}_\alpha$.

Remarques

(i) Les trois termes de l'hamiltonien \hat{H} agissent dans l'espace produit tensoriel champ-particules. En toute rigueur, il faudrait donc écrire le premier terme sous la forme $\hat{H}_P \otimes \hat{\mathbf{1}}_R$, où $\hat{\mathbf{1}}_R$ est l'opérateur identité pour le rayonnement. De même, on devrait écrire $\hat{\mathbf{1}}_P \otimes \hat{H}_R$ pour le deuxième terme. Nous omettons ces opérateurs identité, nous conformant à un usage qui a le mérite d'alléger l'écriture.

(ii) Pour écrire (3.4), nous avons dû utiliser le fait que $\hat{\mathbf{A}}_\perp(\mathbf{r}_\alpha)$ commute avec $\hat{\mathbf{p}}_\alpha$, ce qui résulte du choix de la jauge de Coulomb.

(iii) Notons d'emblée une différence capitale avec l'approche semi-classique du cours « Optique Quantique 1 » : le terme d'interaction est ici indépendant du temps. Il existe donc des états stationnaires et des valeurs bien définies de l'énergie du système total formé par les particules et le rayonnement en interaction.

Appliquons ce formalisme au cas d'un atome, c'est-à-dire des électrons plongés dans le potentiel coulombien du noyau. On admettra que le centre de masse coïncide avec le noyau, localisé au point \mathbf{r}_0 . L'hamiltonien des particules \hat{H}_P est tout simplement l'hamiltonien atomique, dont les états propres $|i\rangle$ sont associés aux niveaux d'énergie E_i :

$$\hat{H}_P|i\rangle = E_i|i\rangle . \quad (3.5)$$

Nous avons vu au chapitre précédent que les états propres de l'hamiltonien du rayonnement \hat{H}_R sont des états à nombre de photons déterminé pour chaque mode : ainsi, l'état $|n_1, \dots, n_\ell, \dots\rangle$ contient n_1 photons dans le mode 1, \dots, n_ℓ photons dans le mode ℓ , et on a

$$\hat{H}_R|n_1, \dots, n_\ell, \dots\rangle = \left(\sum_\ell n_\ell \hbar \omega_\ell + E_v \right) |n_1, \dots, n_\ell, \dots\rangle , \quad (3.6)$$

E_v étant l'énergie du vide

$$E_v = \sum_\ell \frac{1}{2} \hbar \omega_\ell . \quad (3.7)$$

Le système global {atome+champ} pourra donc être décrit dans une base formée d'états produits tensoriels des états propres de \hat{H}_P et de \hat{H}_R . Un tel état $|i\rangle \otimes |n_1, \dots, n_\ell, \dots\rangle$ noté, $|i; n_1, \dots, n_\ell, \dots\rangle$, représente un atome dans l'état $|i\rangle$ en présence de n_1 photons dans le mode 1, \dots, n_ℓ photons dans le mode ℓ . Il est état propre de $\hat{H}_P + \hat{H}_R$:

$$(\hat{H}_P + \hat{H}_R)|i; n_1, \dots, n_\ell, \dots\rangle = \left(E_i + \sum_\ell n_\ell \hbar \omega_\ell + E_v \right) |i; n_1, \dots, n_\ell, \dots\rangle . \quad (3.8)$$

Lorsqu'on tient compte de l'hamiltonien d'interaction \hat{H}_I , cet état n'est pas un état propre de l'hamiltonien total (3.2), et il va donc évoluer vers un nouvel état $|f; n'_1, \dots, n'_\ell, \dots\rangle$ où l'atome aussi bien que le rayonnement ont changé d'état. *L'hamiltonien d'interaction \hat{H}_I est donc responsable des transitions où l'atome change d'état tandis que des photons sont absorbés ou réémis*, l'énergie totale du système {atome + champ} restant la même puisque l'hamiltonien total est indépendant du temps.

3.1.2 Hamiltonien d'interaction

a. Approximation des grandes longueurs d'onde

Comme nous l'avons fait au 2.2.3 du chapitre 2 du cours « Optique Quantique 1 », nous allons simplifier l'expression de l'hamiltonien d'interaction en admettant qu'il est possible de négliger la variation spatiale du champ électromagnétique à l'échelle de l'atome. Nous remplaçons donc dans \hat{H}_I le potentiel vecteur $\hat{\mathbf{A}}_{\perp}(\hat{\mathbf{r}}_{\alpha})$ à la position des électrons par sa valeur à la position \mathbf{r}_0 du noyau, qui est de plus considérée comme une grandeur classique. En se restreignant – pour simplifier les notations – au cas d'un atome à un seul électron, on récrit l'hamiltonien d'interaction³ :

$$\hat{H}_I = -\frac{q}{m}\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{A}}_{\perp}(\mathbf{r}_0) + \frac{q^2}{2m} (\hat{\mathbf{A}}_{\perp}(\mathbf{r}_0))^2 . \quad (3.9)$$

Cette expression ressemble beaucoup à celle de l'équation (??) du chapitre 2 du cours « Optique Quantique 1 ». Elle en diffère pourtant considérablement parce que $\hat{\mathbf{A}}_{\perp}(\mathbf{r}_0)$ est ici un opérateur agissant sur le rayonnement. En utilisant la formule (??) du chapitre 2, nous avons en effet

$$\hat{\mathbf{A}}_{\perp}(\mathbf{r}_0) = \sum_{\ell} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_{\ell}L^3}} \vec{\epsilon}_{\ell} (\hat{a}_{\ell}e^{i\mathbf{k}_{\ell}\cdot\mathbf{r}_0} + \hat{a}_{\ell}^{\dagger}e^{-i\mathbf{k}_{\ell}\cdot\mathbf{r}_0}) \quad (3.10)$$

expression dans laquelle \hat{a}_{ℓ} et \hat{a}_{ℓ}^{\dagger} sont les opérateurs de destruction et de création d'un photon dans le mode ℓ (mode caractérisé par la fréquence ω_{ℓ} , la polarisation $\vec{\epsilon}_{\ell}$, et le vecteur d'onde \mathbf{k}_{ℓ}). La quantité L^3 , qui doit s'éliminer à la fin des calculs, est le volume fictif introduit aux chapitres 1 et 2 pour effectuer la décomposition en modes.

Remarques

(i) L'utilisation de l'approximation des grandes longueurs d'onde demande ici un peu plus de précautions que dans le cours « Optique Quantique 1 ». Il faut en effet s'assurer que les processus physiques étudiés ne font vraiment intervenir que des modes dont la longueur d'onde est beaucoup plus grande que la dimension atomique. Or nous verrons tout au long de ce chapitre que les modes vides peuvent jouer un rôle. Il ne suffit donc pas de s'assurer que le rayonnement incident satisfait à la condition des grandes longueurs d'onde⁴.

(ii) On peut se demander s'il existe une transformation généralisant la transformation de Goppert-Mayer, étudiée dans le chapitre 2 du cours « Optique Quantique 1 » (2.2.4), et conduisant à un hamiltonien d'interaction dipolaire électrique de la forme

$$\hat{H}'_I = -\hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0) \quad (3.11)$$

à l'approximation des grandes longueurs d'onde. Une telle transformation existe effectivement (voir Complément 3C), mais l'hamiltonien total n'est pas simplement la somme de \hat{H}_P , \hat{H}_R et \hat{H}'_I . Il apparaît en effet, à l'issue de la transformation, un terme supplémentaire venant s'ajouter à l'hamiltonien des particules. Ce terme joue un rôle important dans le calcul des corrections radiatives à l'énergie des niveaux atomiques (déplacement de Lamb). Il est néanmoins souvent possible de l'ignorer pour les calculs d'absorption et d'émission qui

³On néglige les termes relatifs au noyau, plus petits par un facteur m/M où M est la masse du noyau.

⁴Voir CDG 1, Chapitre IV.

peuvent alors être traités à l'aide de l'hamiltonien dipolaire électrique \hat{H}'_I .

Le choix entre la forme (3.11) ou (3.9) est souvent dicté par des considérations de commodité de calcul. Notons que (3.9) est quadratique en champ, alors que l'hamiltonien dipolaire électrique est linéaire, ce qui simplifie parfois les calculs. Il ne faut cependant pas en faire une règle générale, comme le montre le calcul de la diffusion Thomson présenté au paragraphe 3.4.3 de ce chapitre, où (3.9) donne le traitement le plus simple.

b. Décomposition de l'hamiltonien d'interaction

L'hamiltonien d'interaction (3.9) apparaît comme la somme de deux termes, respectivement linéaire et quadratique en $\hat{\mathbf{A}}_\perp$. Comme au chapitre 2 du cours « Optique Quantique 1 » nous appellerons ces deux termes \hat{H}_{I1} et \hat{H}_{I2} . Pour simplifier l'écriture, nous utiliserons l'expression (3.9) en faisant $\mathbf{r}_0 = 0$, c'est-à-dire en *prenant le noyau atomique à l'origine des coordonnées*. Nous obtenons alors, à l'approximation des grandes longueurs d'onde :

$$\hat{H}_{I1} = -\frac{q}{m} \sum_\ell \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_\ell L^3}} \hat{\mathbf{p}} \cdot \vec{\epsilon}_\ell (\hat{a}_\ell + \hat{a}_\ell^+) \quad (3.12)$$

$$\hat{H}_{I2} = \frac{q^2}{2m} \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 L^3} \sum_j \sum_\ell \frac{\vec{\epsilon}_j \cdot \vec{\epsilon}_\ell}{\sqrt{\omega_j \cdot \omega_\ell}} (\hat{a}_j \hat{a}_\ell^+ + \hat{a}_j^+ \hat{a}_\ell + \hat{a}_j \hat{a}_\ell + \hat{a}_j^+ \hat{a}_\ell^+) . \quad (3.13)$$

Remarque

Comme nous l'avons noté au chapitre 2 du cours « Optique Quantique 1 » (Remarque (ii) du §2.1.1) il existe des situations physiques où on ne peut plus adopter une écriture dans laquelle la position du noyau disparaît. Ainsi, lorsque l'atome est en mouvement, on doit écrire une position dépendant explicitement du temps, ce qui revient à prendre en compte l'effet Doppler.

On peut même aller plus loin, en considérant que le mouvement du noyau lui-même (ou plus exactement, du centre de masse atomique) doit être quantifié. Il faut alors reprendre l'expression (3.10) du rayonnement à la position \mathbf{r}_0 en remplaçant \mathbf{r}_0 par l'opérateur position $\hat{\mathbf{r}}_0$ du centre de masse atomique. Notons que l'hamiltonien atomique doit dans ces conditions contenir un terme d'énergie cinétique $\hat{\mathbf{p}}_0^2/2M$, expression dans laquelle $\hat{\mathbf{p}}_0$ est l'opérateur impulsion du centre de masse atomique, conjugué de $\hat{\mathbf{r}}_0$, et M la masse de l'atome.

3.2 Processus d'interaction

3.2.1 Hamiltonien \hat{H}_{I1}

L'hamiltonien d'interaction \hat{H}_{I1} est linéaire en \hat{a}_ℓ et \hat{a}_ℓ^+ (cf. Équation 3.12). Au premier ordre de la théorie des perturbations (Chapitre 1 du cours « Optique Quantique 1 ») il ne peut donc induire des transitions qu'entre des états où *le nombre de photons diffère d'une unité*. Si l'état final a un photon de plus que l'état initial, on a un processus d'*émission*. Si l'état final a un photon de moins que l'état initial, il s'agit d'un processus d'*absorption*.

L'hamiltonien \hat{H}_{II} contient également l'opérateur atomique $\hat{\mathbf{p}}$. Cet opérateur atomique étant impair, ses éléments de matrice diagonaux sont nuls (car les états atomiques ont une parité définie). Les transitions induites par \hat{H}_{II} nécessitent obligatoirement un *changement d'état atomique*, entre deux niveaux de parités opposées.

3.2.2 Absorption

Considérons l'atome dans un état $|a\rangle$, en présence de n_j photons d'un mode particulier j , tous les autres modes étant supposés vides. Nous utilisons pour cet état initial une notation simplifiée

$$|\varphi_i\rangle = |a; n_1 = 0, \dots, n_j \dots 0\rangle = |a; n_j\rangle. \quad (3.14)$$

Sous l'effet de \hat{H}_{II} , le système peut passer dans un état final contenant un photon de moins :

$$|\varphi_f\rangle = |b; n'_j = n_j - 1\rangle.$$

En utilisant la relation

$$\hat{a}_j |n_j\rangle = \sqrt{n_j} |n_j - 1\rangle \quad (3.15)$$

(cf. Tableau 1 du chapitre 2), on obtient

$$\langle b; n_j - 1 | \hat{H}_{\text{II}} | a; n_j \rangle = -\frac{q}{m} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_j L^3}} \langle b | \hat{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_j | a \rangle \sqrt{n_j}. \quad (3.16)$$

Les résultats généraux du chapitre 1 du cours « Optique Quantique 1 » relatifs à l'évolution d'un système sous l'effet d'une perturbation constante s'appliquent ici. En particulier, la transition ne se produit avec une probabilité notable qu'entre deux états de même énergie. Cette condition concerne le système total, et elle s'écrit ici

$$E_a + n_j \hbar \omega_j = E_b + (n_j - 1) \hbar \omega_j, \quad (3.17a)$$

d'où

$$E_b = E_a + \hbar \omega_j. \quad (3.17b)$$

L'état final de l'atome a donc une énergie plus élevée que l'état initial, et le processus a une probabilité maximale si l'énergie $\hbar \omega_j$ du photon qui disparaît est exactement égale à l'énergie gagnée par l'atome. Nous retrouvons la *condition de résonance* que nous avons déjà rencontrée dans le traitement semi-classique du cours « Optique Quantique 1 ». De plus nous avons maintenant justifié l'*interprétation du processus d'absorption en terme de photons*, que l'on peut schématiser par le diagramme de la Figure 3.1.

Les résultats de la théorie des perturbations nous donnent d'autres informations. On sait par exemple que dans la limite perturbative la probabilité de transition est proportionnelle au carré du module de l'élément de matrice (3.15), c'est-à-dire au nombre de photons n_j , qui est lui-même proportionnel à l'intensité de l'onde (cf. § 2.51).

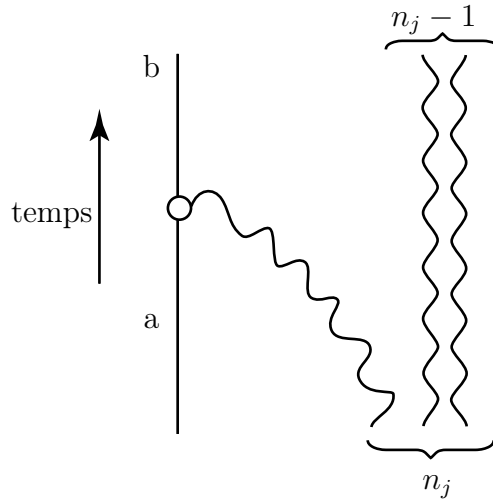


FIG. 3.1: Représentation diagrammatique d'un processus d'absorption. Le diagramme se lit de bas en haut. Un photon disparaît tandis que l'atome passe de l'état $|a\rangle$ à l'état $|b\rangle$.

Remarque

L'utilisation faite ici de la théorie des perturbations pour étudier le processus d'absorption est très différente de celle du cours « Optique Quantique 1 ». Au chapitre 2 de ce cours, le système considéré était l'atome, qui évoluait entre deux niveaux d'énergie différents sous l'effet d'une perturbation dépendant sinusoidalement du temps. Ici, le système quantique est l'ensemble de l'atome et des photons ; il évolue entre deux états de même énergie sous l'effet d'une perturbation constante considérée comme branchée pendant le temps d'interaction.

3.2.3 Émission

Supposons à présent que l'atome est initialement dans un état $|b\rangle$, en présence de n_j photons, et qu'il évolue vers l'état final $|a; n_j + 1\rangle$ contenant un photon de plus. En utilisant la relation

$$\hat{a}_j^+ |n_j\rangle = \sqrt{n_j + 1} |n_j + 1\rangle \quad (3.18)$$

nous pouvons calculer l'élément de matrice

$$\langle a; n_j + 1 | \hat{H}_{I1} | b; n_j \rangle = -\frac{q}{m} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_j L^3}} \langle a | \hat{\mathbf{p}} \cdot \vec{\epsilon}_j | b \rangle \sqrt{n_j + 1}. \quad (3.19)$$

La conservation de l'énergie entre états initial et final s'écrit

$$E_a = E_b - \hbar \omega_j \quad (3.20)$$

Le processus décrit ici est l'émission d'un photon : l'atome passe du niveau b vers un niveau a d'énergie inférieure, en émettant un photon. La figure 3.2 schématise ce processus.

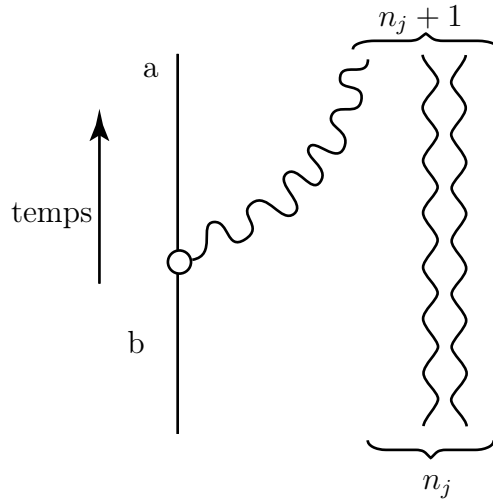


FIG. 3.2: Représentation diagrammatique d'un processus d'émission. L'atome passe de l'état $|b\rangle$ à l'état $|a\rangle$ en émettant un photon. Si $n_j = 0$, il s'agit d'une émission spontanée.

Si le nombre de photons n_j est grand devant 1, la probabilité du processus est, dans le régime perturbatif, proportionnelle à n_j , c'est-à-dire à l'intensité de l'onde. On reconnaît l'émission induite, processus d'autant plus probable que l'intensité du rayonnement incident est forte.

Mais l'équation (3.18) nous montre un autre phénomène. *Même en l'absence de photons incidents* ($n_j = 0$) l'amplitude de transition est différente de 0, et elle vaut

$$\langle a; n_j = 1 | \hat{H}_{I1} | b; 0 \rangle = -\frac{q}{m} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_j L^3}} \langle a | \hat{\mathbf{p}} \cdot \vec{\epsilon}_j | b \rangle. \quad (3.21a)$$

Un *atome isolé*, placé dans le vide, est donc susceptible d'émettre un photon, pourvu qu'il existe un état d'énergie inférieure vers lequel l'élément de matrice (3.21a) soit non nul. L'énergie du photon émis est égale à l'énergie perdue par l'atome (Équation 3.20). Le processus décrit ici est l'**émission spontanée**. Nous le discuterons plus en détail dans la partie 3.3 de ce chapitre.

Remarques

(i) La formule (3.18) décrit simultanément l'émission induite et l'émission spontanée. Dans le terme $n_j + 1$ on associe habituellement le facteur 1 à l'émission spontanée et le facteur n_j à l'émission induite. En comparant à l'équation (3.15) on voit alors clairement la symétrie entre absorption et émission induite.

(ii) Si le mode j est initialement vide, mais le mode ℓ contient n_ℓ photons, l'élément de matrice responsable de l'émission d'un photon dans le mode j est inchangé :

$$\langle a; n_j = 1, n_\ell | \hat{H}_{I1} | b; n_j = 0, n_\ell \rangle = -\frac{q}{m} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_j L^3}} \langle a | \hat{\mathbf{p}} \cdot \vec{\epsilon}_j | b \rangle. \quad (3.21b)$$

Le taux d'émission spontanée dans un mode ne dépend donc pas de la présence ou non de photons dans d'autres modes.

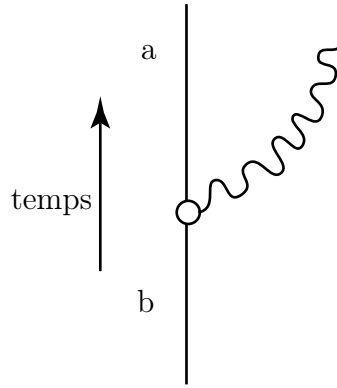


FIG. 3.3: Représentation diagrammatique d'une émission spontanée. À la différence de la figure 3.2, aucun photon n'est présent dans l'état initial.

Il ne faut pourtant pas en conclure que la présence des photons dans le mode ℓ ne change pas la situation. Si on considère un atome excité dans l'état $|b\rangle$ en présence des n_ℓ photons du mode ℓ , il aura une probabilité plus importante d'émettre dans le mode ℓ que dans un mode initialement vide. Une assemblée d'atomes excités émettra donc préférentiellement dans un mode déjà peuplé, non pas parce que le taux d'émission spontanée dans les modes vides diminue, mais parce que l'émission induite dans le mode peuplé ℓ se produit avant que l'émission spontanée dans le mode initialement vide j n'ait eu le temps d'avoir lieu. Cette propriété est à la base du fonctionnement des amplificateurs laser.

3.2.4 Oscillation de Rabi

Nous avons obtenu au chapitre 1 du cours « Optique Quantique 1 » (Paragraphe 2.6) la solution exacte de l'équation d'évolution pour un système à deux niveaux soumis à une interaction constante couplant les deux états : si le système est initialement dans l'un des deux états, la probabilité de le trouver dans le deuxième état est une fonction sinusoïdale du temps : c'est l'oscillation de Rabi.

Nous pouvons appliquer ces résultats au système global formé de l'atome et du rayonnement dans le mode j . Prenons comme état initial l'état $|\varphi_i\rangle = |a; n_j\rangle$ où l'atome est dans l'état $|a\rangle$ et le nombre initial de photons dans le mode j est n_j (cf. Équation 3.14). Sous l'effet de \hat{H}_{I1} , l'état $|\varphi_i\rangle$ est couplé à $|\varphi_f\rangle = |b; n_j - 1\rangle$. Si nous *négligeons la possibilité d'une émission spontanée dans d'autres modes*, on peut se limiter aux deux états $|\varphi_i\rangle$ et $|\varphi_f\rangle$, entre lesquels se produit l'oscillation de Rabi. En écrivant le couplage entre les deux niveaux sous la forme

$$\langle \varphi_f | \hat{H}_{I1} | \varphi_i \rangle = \frac{\hbar \Omega_1}{2} \quad (3.22a)$$

on fait apparaître la pulsation de Rabi Ω_1 , égale à (cf. Éq. 3.15)

$$\Omega_1 = -\frac{q}{m} \frac{2}{\sqrt{2\varepsilon_0 \hbar \omega_j L^3}} \langle b | \hat{\mathbf{p}} \cdot \vec{\epsilon}_j | a \rangle \sqrt{n_j}. \quad (3.22b)$$

Les résultats du chapitre 1 du cours « Optique Quantique 1 » (Équation ??) nous donnent alors la probabilité de trouver l'atome dans l'état $|\varphi_f\rangle$ au bout du temps T :

$$P_{i \rightarrow f}(T) = \frac{\Omega_1^2}{\delta^2 + \Omega_1^2} \sin^2 \left(\sqrt{\Omega_1^2 + \delta^2} \frac{T}{2} \right), \quad (3.23)$$

formule dans laquelle on a introduit le désaccord à résonance

$$\delta = \omega_j - \frac{E_b - E_a}{\hbar}. \quad (3.24)$$

On retrouve donc l'oscillation de Rabi, qui se produit entre les états atomiques $|a\rangle$ et $|b\rangle$ sous l'effet d'un rayonnement quasi-résonnant.

Remarque

L'oscillation de Rabi sous l'effet du rayonnement a été présentée au chapitre 2 du cours « Optique Quantique 1 ». On l'avait alors décrite comme l'oscillation d'un système quantique (l'atome) entre deux états ($|a\rangle$ et $|b\rangle$) d'énergies différentes, sous l'effet d'un couplage sinusoïdal de fréquence $\omega \cong (E_b - E_a)/\hbar$. Ici, le système considéré est l'ensemble {atome-photons}, qui transite entre deux états de même énergie : l'état atomique fondamental avec n_j photons, et l'état atomique excité avec un photon de moins. Le couplage est constant, appliqué pendant l'intervalle de temps T .

3.2.5 Hamiltonien \hat{H}_{I2} : diffusion élastique

Comme le montre l'équation (3.13), à l'approximation des grandes longueurs d'onde l'hamiltonien \hat{H}_{I2} n'agit que sur le rayonnement. Vis à vis de l'atome, il se comporte comme l'opérateur identité. Les transitions provoquées par \hat{H}_{I2} s'effectuent donc *sans changement d'état atomique* : elles n'affectent que le rayonnement.

Les divers processus associés aux quatre termes de \hat{H}_{I2} n'ont pas tous la même probabilité de se produire. Le terme $\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_\ell^\dagger$ décrit l'apparition de deux photons : il ne respecte pas la condition d'égalité des énergies initiale et finale et la probabilité associée est donc très faible. Il en est de même du terme $\hat{a}_j \hat{a}_\ell$ qui décrit la disparition de deux photons. Ces deux processus sont donc très peu probables.

En revanche, un terme du type $\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_\ell$ décrit la disparition d'un photon du mode ℓ et l'apparition d'un photon du mode j . Ce processus peut conserver l'énergie si les fréquences ω_j et ω_ℓ sont égales : les photons j et ℓ *diffèrent alors par leur direction de propagation et leur polarisation*. Il s'agit d'un processus de *diffusion élastique*, sans changement de fréquence, représenté par le diagramme de la Figure 3.4.

L'élément de matrice d'un tel processus s'obtient à partir de l'expression (3.13). Si le mode ℓ contient initialement n_ℓ photons, le mode j étant initialement vide, on a :

$$\begin{aligned} \langle a; n_j = 1, n_\ell - 1 | \hat{H}_{I2} | a; n_j = 0, n_\ell \rangle = \\ \sqrt{n_\ell} \langle a; n_j = 1, n_\ell = 0 | \hat{H}_{I2} | a; n_j = 0, n_\ell = 1 \rangle \frac{q^2}{m} \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 L^3} \frac{\vec{\epsilon}_j \cdot \vec{\epsilon}_\ell}{\omega_j} \sqrt{n_\ell}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

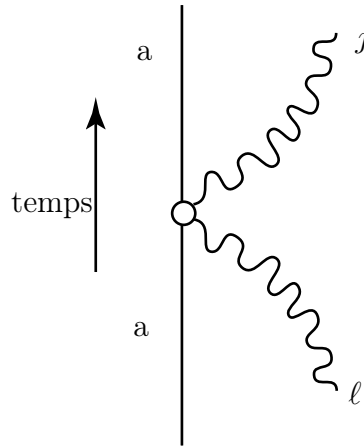


FIG. 3.4: Diffusion d'un photon du mode ℓ vers le mode j . Ce processus conserve l'énergie $\omega_j = \omega_\ell$. On a alors une diffusion élastique.

Dans cette expression, on a tenu compte de l'égalité des fréquences incidente et diffusée

$$\omega_\ell = \omega_j, \quad (3.26)$$

et du fait qu'il existe dans (3.13) deux termes associés au même processus. L'expression (3.25) sera utilisée plus loin (Partie 3.4) pour calculer la *section efficace de diffusion*. Nous pouvons déjà noter que la probabilité du processus de diffusion décrit ci-dessus est proportionnelle au carré du module de (3.25) et donc au nombre n_ℓ de photons, soit encore à l'intensité du rayonnement.

Remarque

L'expression (3.26) décrit la diffusion d'un mode ℓ occupé vers un mode j initialement vide. Si le mode j était lui aussi occupé dans l'état initial, l'élément de matrice (3.25) serait multiplié par un facteur $\sqrt{n_j + 1}$, et le processus serait beaucoup plus probable : on aurait une *diffusion induite* du mode ℓ vers le mode j . Il s'agit d'un *processus non-linéaire*, appelé « diffusion stimulée », dont la probabilité est proportionnelle au *produit des intensités lumineuses* dans le mode j et dans le mode ℓ .

3.3 Émission spontanée

3.3.1 Émission spontanée

a. Principe du calcul

Nous avons vu (§3.2.3) qu'un atome dans un état excité $|b\rangle$ est susceptible de se désexciter spontanément vers un état $|a\rangle$, d'énergie inférieure E_a , en émettant un photon spontané dans le mode j . Dans ce processus, le système atome-rayonnement passe de l'état $|b, 0\rangle$ (atome excité dans le vide) à l'état $|a, 1_j\rangle$ (atome dans son état fondamental,

et 1 photon dans le mode j). On sait qu'une telle transition, induite par un couplage indépendant du temps, ne se produit que si les états initial et final ont des énergies très voisines et le photon émis a donc une énergie $\hbar\omega_j$ quasiment égale à $E_b - E_a$ que l'on note $\hbar\omega_0$:

$$\hbar\omega_j \simeq E_b - E_a = \hbar\omega_0 . \quad (3.27)$$

Ce processus peut donc se représenter par le diagramme de la Figure 3.5 qui traduit, sous une autre forme, le même phénomène que la Figure 3.3. Nous supposons ici, pour simplifier la discussion, qu'il n'existe qu'un seul état a d'énergie inférieure à b vers lequel l'atome puisse se désexciter par émission d'un photon.

Comme les modes du champ électromagnétique ont des fréquences qui forment un quasi-continuum, les états finaux $|a; 1_j\rangle$ du processus ont des énergies qui forment aussi un quasi-continuum et nous pouvons appliquer les résultats obtenus dans le cours « Optique Quantique 1 » concernant le couplage entre un niveau discret et un continuum. Rappelons que ce formalisme permet de calculer perturbativement, grâce à la règle d'or de Fermi, un *taux de départ* Γ_{sp} depuis le niveau discret. Ici, tout départ se traduit par l'apparition d'un photon spontané et le taux de départ peut aussi s'interpréter comme un *taux d'émission spontanée* c'est-à-dire un *taux d'apparition de photons*. Ce taux sera calculé aux paragraphes suivants. Nous pouvons de plus utiliser le traitement de Wigner et Weisskopf (Équation (??) du chapitre 1 du cours « Optique Quantique 1 »), pour obtenir le résultat essentiel de cette partie : la probabilité de présence de l'atome dans l'état excité $|b\rangle$ décroît exponentiellement avec une constante de temps Γ_{sp}^{-1} qui s'interprète comme la **durée de vie radiative** de l'état $|b\rangle$:

$$\tau_{\text{sp}} = \frac{1}{\Gamma_{\text{sp}}} . \quad (3.28)$$

Le calcul par la règle d'or de Fermi, qui sera détaillé aux paragraphes 3.3.3 et 3.3.4, donne en fait le *taux différentiel d'émission spontanée d'un photon de direction et de polarisation données* (l'énergie étant fixée par la relation 3.27), dont l'intégrale sur les directions d'émission et sur les polarisations, conduit au taux global d'émission spontanée Γ_{sp} . Le rapport entre le taux différentiel et le taux global permet de connaître le *diagramme de rayonnement* pour la transition $|b\rangle \rightarrow |a\rangle$, c'est-à-dire la distribution angulaire du rayonnement émis, pour chaque polarisation. Nous verrons que dans l'espace libre ce diagramme est déterminé (cf. Équation 3.22) par l'élément de matrice

$$\langle a | \hat{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\ell | b \rangle , \quad (3.29)$$

qui ne dépend, à une constante multiplicative près, que des moments cinétiques des états $|a\rangle$ et $|b\rangle$. Pour pouvoir mener le calcul jusqu'au bout, nous considérerons une transition particulière que nous précisons maintenant et qui nous permettra d'explicitier la démarche que nous venons de présenter.

b. Transition $(l = 1, m = 0) \rightarrow (l = 0, m = 0)$

Nous considérons le cas particulier d'un atome à un seul électron dont l'état fondamental $|a\rangle$ a un moment cinétique orbital nul ($l = 0$, et donc $m_l = 0$). Nous prendrons

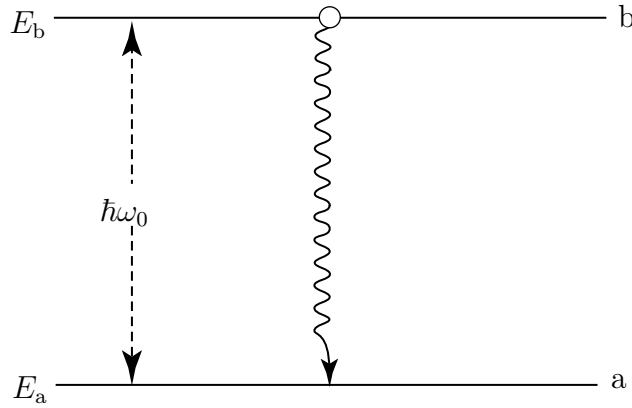


FIG. 3.5: Émission spontanée entre un état excité $|b\rangle$ et un état d'énergie inférieure $|a\rangle$. Le photon émis a une énergie voisine de $\hbar\omega_0 = E_b - E_a$. La direction d'émission et la polarisation sont des variables aléatoires. Leur distribution de probabilité donne le diagramme de rayonnement de l'atome, dépendant des caractéristiques des états $|a\rangle$ et $|b\rangle$.

comme état excité un état $|b\rangle$ de moment cinétique orbital ($l = 1, m_l = 0$), m_l étant relatif à la composante $\hat{L}_z = \mathbf{e}_z \cdot \hat{\mathbf{L}}$ du moment cinétique suivant Oz . Il est alors facile de montrer que

$$\langle a | \hat{p}_x | b \rangle = \langle a | \hat{p}_y | b \rangle = 0 \quad (3.30)$$

de sorte que l'élément de matrice (3.29) s'exprime simplement en fonction de $\langle a | \hat{p}_z | b \rangle$:

$$\langle a | \hat{\mathbf{p}} \cdot \vec{\epsilon}_j | b \rangle = \langle a | \hat{p}_z | b \rangle (\mathbf{e}_z \cdot \vec{\epsilon}_j) . \quad (3.31)$$

La nullité des éléments de matrice (3.30) peut se montrer en se souvenant que $\langle a | \hat{p}_x | b \rangle$ et $\langle a | \hat{p}_y | b \rangle$ sont proportionnels respectivement à $\langle a | \hat{x} | b \rangle$ et $\langle a | \hat{y} | b \rangle$ (voir l'équation (??) du cours « Optique Quantique 1 »). La nullité des éléments de matrice de \hat{x} ou de \hat{y} dans une transition ($l = 1, m = 0$) \rightarrow ($l = 0, m = 0$) résulte de la dépendance angulaire des fonctions d'ondes correspondantes (voit le complément 2A du cours « Optique Quantique 1 »). On écrit par exemple

$$\langle a | \hat{x} | b \rangle = \int r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi R_a^*(r) Y_0^{0*}(\theta, \varphi) r \sin \theta \cos \varphi R_b(r) Y_1^0(\theta, \varphi) , \quad (3.32a)$$

ce qui est nul car les harmoniques sphériques Y_0^0 et Y_1^0 ne dépendent pas de l'angle φ . Il en est de même pour $\langle a | \hat{y} | b \rangle$ qui s'exprime comme ci-dessus en remplaçant

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad (3.32b)$$

par

$$y = r \sin \theta \sin \varphi . \quad (3.32c)$$

En revanche, en se souvenant que

$$z = r \cos \theta \quad (3.32d)$$

on voit qu'il n'y a aucune raison a priori pour que l'élément de matrice $\langle a | \hat{z} | b \rangle$, et donc $\langle a | \hat{p}_z | b \rangle$, soit nul.

3.3.2 Quasi-continuum des états à un photon. Densité d'états

Pour utiliser la règle d'or de Fermi, il faut connaître la *densité des états* finaux $|a; 1_j\rangle$, qui est identique à la *densité des états à un seul photon* $|1_j\rangle$. En définitive, il nous suffit d'étudier la *densité des modes* j sur lesquels on a quantifié le rayonnement. Nous supposons que les modes ont été définis comme au chapitre 1, en utilisant des conditions aux limites périodiques sur un volume de discrétisation cubique, d'arête L . Les modes sont alors des ondes planes de vecteur d'onde

$$\mathbf{k}_j = \frac{2\pi}{L} (n_x \mathbf{e}_x + n_y \mathbf{e}_y + n_z \mathbf{e}_z) \quad (3.33a)$$

et de fréquence

$$\omega_j = ck_j . \quad (3.33b)$$

Dans ces formules, \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y et \mathbf{e}_z sont les vecteurs unitaires d'un trièdre trirectangle et les nombres n_x , n_y et n_z sont des entiers relatifs.

À chaque vecteur d'onde \mathbf{k}_j sont associés deux modes, correspondant à deux polarisation $\vec{\epsilon}$ et $\vec{\epsilon}'$ formant avec \mathbf{k}_j un trièdre (cf. Figure 1.1 du chapitre 1). Si on choisit $\vec{\epsilon}$ dans le plan $(\mathbf{e}_z, \mathbf{k})$ le vecteur $\vec{\epsilon}'$ est perpendiculaire à \mathbf{e}_z , et l'élément de matrice (3.31) est nul pour la transition considérée ici. Nous ignorerons donc les modes polarisés perpendiculairement à \mathbf{e}_z , et nous compterons dans la densité d'états « utiles » un seul mode pour chaque vecteur d'onde \mathbf{k}_j , celui qui est polarisé dans le plan $(\mathbf{e}_z, \mathbf{k}_j)$. Si θ est l'angle entre \mathbf{e}_z et \mathbf{k}_j , l'élément de matrice (3.31) est proportionnel à

$$\mathbf{e}_z \cdot \vec{\epsilon}_j = \sin \theta . \quad (3.34)$$

À chacun des modes correspond un seul vecteur d'onde \mathbf{k}_j et donc un seul point dans l'espace réciproque (figure 3.6). La formule (3.33a) nous montre alors que l'ensemble de ces points forme un réseau cubique, dont la maille a un volume $(2\pi/L)^3$. La densité d'états dans l'espace réciproque est l'inverse de ce volume. Elle vaut $\rho = (L/2\pi)^3$, mais ce n'est pas encore la quantité qui nous intéresse, car pour appliquer la règle d'or de Fermi il faut la densité d'états en fonction de l'énergie.

L'énergie de l'état $|1_j\rangle$ est

$$E_j = \hbar\omega_j = \hbar ck_j . \quad (3.35)$$

Lorsque L tend vers l'infini, l'équation (3.33a) nous montre que les énergies E_j sont de plus en plus serrées⁵, et on a donc bien un quasi-continuum d'états. Si nous repérons un état $|1_j\rangle$ par son énergie E_j et par la direction (θ, φ) du vecteur d'onde \mathbf{k}_j (Figure 3.6), la densité d'état à déterminer est $\rho(\theta, \varphi; E)$ définie par

$$dN = \rho(\theta, \varphi; E) dE d\Omega , \quad (3.36)$$

⁵Rappelons que la procédure consistant à faire tendre L vers l'infini n'est valable que dans l'espace libre. Dans une cavité, le volume de quantification prend un sens physique et les résultats obtenus ici ne sont plus nécessairement valables (Voir Complément 3A).

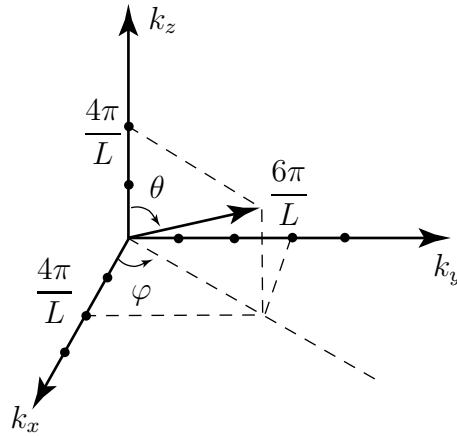


FIG. 3.6: Représentation des modes dans l'espace réciproque. A titre d'exemple, on a représenté (par son vecteur d'onde) le mode \$(n_x = 2, n_y = 3, n_z = 2)\$. La direction \$\mathbf{k}_j\$ est repérée par les angle \$\theta\$ et \$\varphi\$. L'ensemble des extrémités des vecteurs \$\mathbf{k}_j\$ associés aux modes définis par (3.33a) forme un réseau cubique d'arête \$2\pi/l\$.

formule dans laquelle \$dN\$ est le nombre d'états dont l'énergie est comprise entre \$E\$ et \$E + dE\$ et dont le vecteur d'onde pointe dans l'angle solide \$d\Omega\$ autour de la direction \$(\theta, \varphi)\$. Les vecteurs d'onde correspondants ont leurs extrémités situées entre les sphères de rayons \$k\$ et \$k + dk\$, correspondant aux énergies \$E/\hbar c\$ et \$(E + dE)/\hbar c\$, et ils pointent dans l'angle solide \$d\Omega\$. Le volume correspondant vaut

$$d^3k = k^2 dk d\Omega = \frac{E^2}{(\hbar c)^3} dE d\Omega. \quad (3.37)$$

En divisant ce volume par le volume \$(2\pi/L)^3\$ associé à chaque mode, on obtient le nombre d'états dans le volume élémentaire (3.37)

$$dN = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \frac{E^2}{(\hbar c)^3} dE d\Omega \quad (3.38)$$

d'où la densité d'états cherchée :

$$\rho(\theta, \varphi; E) = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \frac{E^2}{(\hbar c)^3}. \quad (3.39)$$

Remarques

(i) La densité d'état (3.39) est isotrope (elle est indépendante de la direction de propagation). Ce résultat est satisfaisant, puisque l'espace est isotrope.

(ii) L'expression de la densité d'états (3.39) n'est dénuée de toute ambiguïté que si elle est associée à la relation de définition (3.36). On aurait pu définir une autre densité d'état \$\rho'(\theta, \varphi)\$ par la relation \$dN = \rho'(\theta, \varphi) dE d\theta d\varphi\$, qui conduirait bien évidemment aux mêmes prévisions physiques. L'avantage de la définition (3.36) basée sur l'angle solide est que la densité (3.39) obtenue est explicitement isotrope, alors que \$\rho'(\theta, \varphi)\$ dépend de \$\theta\$, ce qui pourrait laisser croire à tort qu'il n'y a pas isotropie.

3.3.3 Taux d'émission spontanée dans une direction donnée

Pour appliquer la règle d'or de Fermi, nous devons prendre la densité d'états finaux du système total $|a; 1_j\rangle$ autour de la valeur d'énergie $E_a + E_j$ égale à l'énergie E_b de l'état initial $|b; 0\rangle$. Cette densité est égale à la densité des modes de rayonnement autour de la valeur $E_j = E_b - E_a = \hbar\omega_0$ (cf. Équation 3.27). On obtient ainsi (cf. Équation ?? du chapitre 1 du cours « Optique Quantique 1 ») le taux d'émission spontanée par unité d'angle solide dans la direction (θ, φ) :

$$\frac{d\Gamma_{\text{sp}}}{d\Omega} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle a; 1_j | \hat{H}_{\text{II}} | b; 0 \rangle \right|^2 \rho(\theta, \varphi; E_j = \hbar\omega_0). \quad (3.40)$$

En remplaçant l'élément de matrice de \hat{H}_{II} par son expression (3.22), la densité d'états par l'expression (3.39) et en tenant compte de (3.31) et (3.34), on aboutit à une expression indépendante de la dimension L de la boîte de discrétisation. Dans le cas particulier d'une transition $(l = 1, m = 0) \rightarrow (l = 0, m = 0)$, on obtient

$$\frac{d\Gamma_{\text{sp}}}{d\Omega}(\theta, \varphi) = \frac{q^2}{8\pi^2\epsilon_0} \frac{\omega_0}{m^2\hbar c^3} |\langle a | \hat{p}_z | b \rangle|^2 \sin^2 \theta \quad (3.41)$$

Le terme $\sin^2 \theta$ décrit le diagramme d'émission spontanée pour une transition $(l = 1, m = 0) \rightarrow (l = 0, m = 0)$: l'émission est nulle suivant la direction Oz ($\theta = 0$), et elle est maximale suivant les directions perpendiculaires à Oz . Rappelons en outre que la lumière émise a une polarisation $\vec{\epsilon}$ contenue dans le plan (Oz, \mathbf{k}) , et perpendiculaire à la direction d'émission \mathbf{k} .

Remarque

(i) Le diagramme de rayonnement obtenu ici est le même que celui obtenu par le calcul classique du rayonnement d'un dipôle oscillant suivant l'axe Oz (Complément 1A du cours « Optique Quantique 1 »). Cette ressemblance est liée au choix particulier de la transition $(l = 1, m = 0) \rightarrow (l = 0, m = 0)$, pour laquelle seul l'élément de matrice \hat{p}_z est non nul.

Si on avait considéré une transition $(l = 1, m = \pm 1) \rightarrow (l = 0, m = 0)$, on saurait trouvé un diagramme de rayonnement analogue à celui d'un dipôle classique tournant dans le plan (xOy) . Ces ressemblances sont associées au caractère vectoriel de l'opérateur $\hat{\mathbf{p}}$ intervenant dans l'hamiltonien \hat{H}_{II} .

(ii) Pour une transition quelconque, le calcul du taux d'émission spontanée dans une direction donnée doit se faire pour deux polarisations $\vec{\epsilon}$ et $\vec{\epsilon}'$ orthogonales entre elles (et perpendiculaires à la direction d'émission), ce qui donne deux taux différents :

$$\frac{d\Gamma_{\text{sp}}}{d\Omega}(\theta, \varphi, \vec{\epsilon}) \quad \text{et} \quad \frac{d\Gamma_{\text{sp}}}{d\Omega}(\theta, \varphi, \vec{\epsilon}') \quad (3.42)$$

respectivement proportionnels à

$$|\langle a | \mathbf{p} \cdot \vec{\epsilon} | b \rangle|^2 \quad \text{et} \quad |\langle a | \mathbf{p} \cdot \vec{\epsilon}' | b \rangle|^2 \quad (3.43)$$

Le taux total d'émission spontanée dans la direction (θ, φ) est la somme des deux taux (3.42).

Les deux polarisations $\vec{\varepsilon}$ et $\vec{\varepsilon}'$ peuvent être complexes, ce qui permet de décrire des polarisations circulaires ou elliptiques. On peut alors en général, pour une transition et pour une direction d'émission donnée, trouver un couple de polarisation mutuellement orthogonales (au sens hilbertien $\vec{\varepsilon}' \cdot \vec{\varepsilon}^* = 0$), et telles que l'une des deux corresponde à un élément de matrice (3.41c) nul. Cette démarche est la généralisation du calcul fait dans le cas de la transition $(l = 1, m = 0) \rightarrow (l = 0, m = 0)$.

Au-delà d'une simplification de calcul, une telle démarche donne des indications intéressantes sur la polarisation de la lumière émise. C'est ainsi que pour la transition $(l = 1, m = 0) \rightarrow (l = 0, m = 0)$ nous avons trouvé une polarisation linéaire, dans le plan contenant l'axe Oz . Pour une transition $(l = 1, m = \pm 1) \rightarrow (l = 0, m = 0)$, on trouverait que la lumière émise dans une direction quelconque est polarisée elliptiquement. Mais pour une émission suivant Oz , la lumière est polarisée circulairement, tandis que pour une émission perpendiculaire à Oz , la lumière est polarisée linéairement, dans le plan perpendiculaire à Oz . Ici, encore, le résultat est analogue à celui obtenu en électromagnétisme classique pour un dipôle tournant dans le plan (xOy) .

De façon générale, pour une transition $(l = 1) \rightarrow (l = 0)$, la polarisation de la lumière émise est analogue à celle prévue par l'électromagnétisme classique pour un dipôle classique judicieusement choisi en fonction du sous niveau magnétique m de l'atome dans l'état initial.

3.3.4 Durée de vie du niveau excité. Largeur naturelle

Pour trouver le taux global d'émission spontanée, il suffit d'intégrer le taux différentiel (3.41) sur toutes les directions d'émission :

$$\Gamma_{\text{sp}} = \int \frac{d\Gamma_{\text{sp}}}{d\Omega} d\Omega . \quad (3.44)$$

En coordonnées sphériques l'élément différentiel d'angle solide vaut

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi . \quad (3.45a)$$

L'intégrale (3.44) fait donc apparaître, compte tenu de (3.41)

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta = \frac{8\pi}{3} . \quad (3.45b)$$

On trouve finalement, pour la transition $(l = 1, m = 0) \rightarrow (l = 0, m = 0)$:

$$\Rightarrow \Gamma_{\text{sp}} = \frac{q^2}{3\pi\epsilon_0} \frac{\omega_0}{m^2 \hbar c^3} |\langle \mathbf{a} | \hat{p}_z | \mathbf{b} \rangle|^2 . \quad (3.46)$$

Ce taux correspond à la *probabilité totale d'émission spontanée par unité de temps*. La **durée de vie radiative** de l'état $|\mathbf{b}\rangle$ est l'inverse de cette quantité (cf. Équation 3.28).

Remarque

Si l'état $|b\rangle$ peut se désexciter par émission spontanée vers plusieurs états d'énergies inférieures $|a_1\rangle, |a_2\rangle \dots$ sa probabilité totale d'émission spontanée est la somme des probabilités associées à chaque transition et on a donc un taux

$$\Gamma_{\text{sp}} = \Gamma_{\text{sp}}^{(1)} + \Gamma_{\text{sp}}^{(2)} + \dots \quad (3.47a)$$

ou encore une durée de vie radiative

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + \dots \quad (3.47b)$$

Cette situation se produit souvent pour des niveaux très excités. On la retrouve aussi pour des transitions conduisant vers le niveau fondamental lorsque celui-ci est dégénéré. Il faut dans ce cas sommer les taux de transition sur tous les sous-niveaux de l'état fondamental pour obtenir la durée de vie radiative de l'état excité.

Comme nous l'avons indiqué au chapitre 1 du cours « Optique Quantique 1 » (Équation ??) la distribution en énergie de l'état final du processus est une Lorentzienne de largeur à mi-hauteur égale au taux de transition. Les photons d'émission spontanée ont donc un spectre de fréquences centré sur ω_0 et de largeur à mi-hauteur Γ_{sp} . Plus précisément, la probabilité par unité de bande de fréquence d'observer un photon spontané autour de la fréquence ω vaut :

$$\frac{dP}{d\omega} = \frac{\Gamma_{\text{sp}}}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\Gamma_{\text{sp}}^2}{4}}. \quad (3.48)$$

La largeur à mi-hauteur de cette courbe, que l'on appelle **largeur naturelle** de la transition radiative entre les deux états, est donc ici égale au taux d'émission spontanée Γ_{sp} de l'état excité⁶.

On donne souvent une expression Γ_{sp} différente de (3.46), faisant intervenir le dipôle atomique. Il est en effet possible d'utiliser l'élément de matrice de \hat{z} au lieu de \hat{p}_z , en se servant de la relation (??) du cours « Optique Quantique 1 »

$$\langle a | \hat{p}_z | b \rangle = -i\omega_0 m \langle a | \hat{z} | b \rangle, \quad (3.49a)$$

et en introduisant l'élément de matrice de l'opérateur dipôle électrique

$$\langle a | \hat{D}_z | b \rangle = q \langle a | \hat{z} | b \rangle. \quad (3.49b)$$

On obtient alors

$$\Gamma_{\text{sp}} = \frac{1}{3\pi\epsilon_0} \frac{\omega_0^3}{\hbar c^3} \left| \langle a | \hat{D}_z | b \rangle \right|^2. \quad (3.49c)$$

Cette expression se prête bien à des calculs de durée de vie, par exemple dans le cas de l'atome d'hydrogène où les fonctions d'onde sont connues. Ainsi, dans le cas de la transition *Lyman* α , du niveau $2p$ vers le niveau $1s$, le calcul donne un taux $\Gamma_{\text{sp}} = 6 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$, ce qui correspond à la durée de vie mesurée qui vaut 1,6 ns.

⁶La largeur naturelle de la transition ne coïncide avec l'inverse de la durée de vie de l'état excité que si l'état inférieur de la transition est stable, c'est-à-dire de largeur nulle.

Il peut également être utile d'exprimer Γ_{sp} en fonction de la force d'oscillateur de la transition, quantité sans dimension définie par

$$f_{\text{ab}} = \frac{2m\omega_0 |\langle \mathbf{a} | \hat{z} | \mathbf{b} \rangle|^2}{\hbar}. \quad (3.50)$$

On a alors

$$\Gamma_{\text{sp}} = f_{\text{ab}} \Gamma_{\text{cl}} \quad (3.51)$$

formule dans laquelle on a fait apparaître

$$\Gamma_{\text{cl}} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0} \frac{\omega_0^2}{mc^3} \quad (3.52)$$

qui est l'inverse du temps d'amortissement radiatif classique d'un électron élastiquement lié (Complément 1A).

Les forces d'oscillateur sont des nombres souvent de l'ordre de 1, ce qui rend la formule (3.50) particulièrement utile. Par exemple, pour la transition Lyman α de l'hydrogène on a $f_{\text{ab}} = 0,42$.

Remarques

(i) Dans le cas où les éléments de matrice de \hat{p}_x et \hat{p}_y entre $|\mathbf{a}\rangle$ et $|\mathbf{b}\rangle$ ne sont pas nuls, et pour un état $|\mathbf{b}\rangle$ ayant un moment cinétique orbital l nul, la formule (3.51) reste vraie à condition de généraliser la définition (3.50) sous la forme

$$f_{\text{ab}} = \frac{2m\omega_0}{\hbar} |\langle \mathbf{a} | \hat{\mathbf{r}} | \mathbf{b} \rangle|^2. \quad (3.53)$$

(ii) Comme le montrent les expressions ci-dessus, le taux d'émission spontanée croît avec la fréquence de la transition considérée (comme ω_0^2 si on avait une force d'oscillateur constante). Il est donc beaucoup plus grand pour une transition dans l'ultraviolet que pour une transition dans l'infrarouge. Typiquement, les durées de vie radiative sont de l'ordre de la nanoseconde dans l'ultraviolet, de la dizaine de nanosecondes dans le visible, de la microseconde dans l'infrarouge proche. Dans l'infrarouge lointain, et a fortiori dans la gamme des micro-ondes, l'émission spontanée est un processus extrêmement faible. (Il joue néanmoins un rôle en astrophysique, par exemple pour l'émission à 21 *cm* de l'hydrogène interstellaire).

(iii) L'émission spontanée croît plus vite avec la fréquence que l'émission induite. Cette propriété est liée au fait que l'émission induite se produit dans un mode déterminé, alors que l'émission spontanée conduit à l'émission d'un photon dans un nombre de modes qui croît comme ω_0^2 à cause de la dépendance en fréquence (3.39) de la densité d'états.

(iv) Il peut arriver, pour des raisons de symétrie, que l'élément de matrice (3.49) de la transition soit nul. L'émission spontanée ne peut alors pas se produire : il s'agit d'une « raie interdite ». Il en est ainsi entre niveaux de même parité, les opérateurs dipôle électrique ou position étant des opérateurs impairs. Un exemple intéressant est celui du niveau 2S ($n = 2, \ell = 0$) de l'hydrogène, qui ne peut pas se désexciter par transition dipolaire électrique vers le niveau fondamental 1S ($n = 1, \ell = 0$), de même parité. Le seul autre niveau d'énergie inférieure à celle du niveau 2S est le niveau $2P_{1/2}$, mais la transition correspondante a une fréquence de 1 GHz, dans la gamme des micro-ondes, et le taux d'émission spontanée correspondant est négligeable. Le niveau 2S est donc *métastable*, c'est-à-dire qu'il est stable bien que n'ayant pas l'énergie minimale. En fait, ce niveau a une petite probabilité de se désexciter vers l'état 1S par une émission spontanée à deux photons, dont le taux

pourrait se calculer comme ci-dessus mais en faisant intervenir l'hamiltonien d'interaction au second ordre de la théorie des perturbations. La durée de vie associée à ce processus d'ordre supérieur est de l'ordre de la seconde.

(v) On peut montrer que tous les sous-niveaux Zeeman d'un même niveau (n, l) ont la même durée de vie radiative.

3.4 Diffusion d'un photon par un atome

3.4.1 Généralités - Section efficace de diffusion

Un processus de diffusion est un processus au cours duquel, en présence d'un atome, un photon disparaît d'un mode pour apparaître dans un autre. L'état atomique final peut être identique ou différent de l'état atomique initial. Dans le premier cas, à cause de la conservation de l'énergie, le photon diffusé a la même fréquence que le photon incident et la diffusion est *élastique*. Si l'énergie interne atomique est modifiée lors du processus, on a une *diffusion inélastique* avec changement de fréquence du rayonnement : il s'agit d'une *diffusion Raman*⁷.

Nous avons montré au paragraphe (3.2.5) que l'hamiltonien d'interaction \hat{H}_{I2} peut induire une diffusion sans changement d'état atomique (Figure 3.4) : il s'agit donc d'une diffusion élastique. Comme \hat{H}_{I2} est quadratique en potentiel vecteur, la diffusion apparaît au premier ordre de la théorie des perturbations et s'exprime en fonction de l'élément de matrice de transition donné par la formule (3.25).

Un autre mécanisme permet d'obtenir un processus de diffusion, c'est celui qui est décrit par l'action de \hat{H}_{I1} lorsqu'on effectue un calcul de perturbation au second ordre (Chapitre 1 du cours « Optique Quantique 1 », § 2.2.5). Nous avons vu comment on peut décrire quantitativement une transition au second ordre de la théorie des perturbations en introduisant un hamiltonien effectif, dont l'élément de matrice entre l'état initial et l'état final s'écrit, dans le cas d'un seul photon incident ($n_\ell = 1$) :

$$\begin{aligned} \langle a'; 1_j | \hat{H}_I^{\text{eff}} | a; 1_\ell \rangle &= \sum_b \frac{\langle a'; 1_j | \hat{H}_{I1} | b; 0 \rangle \langle b; 0 | \hat{H}_{I1} | a; 1_\ell \rangle}{E_a - E_b + \hbar\omega_\ell} \\ &+ \sum_b \frac{\langle a'; 1_j | \hat{H}_{I1} | b; 1_j, 1_\ell \rangle \langle b; 1_j, 1_\ell | \hat{H}_{I1} | a; 1_\ell \rangle}{E_a - E_b - \hbar\omega_j} \end{aligned} \quad (3.54)$$

La première somme de la formule (3.54) décrit un processus pour lequel l'état intermédiaire de diffusion est l'état $|b; 0\rangle$ (atome dans l'état $|b\rangle$ et aucun photon). Ce premier terme est associé à la figure (3.7). La seconde somme de (3.54) correspond au diagramme de la

⁷Cette discussion suppose implicitement le niveau atomique initial non dégénéré. Dans le cas contraire, il peut y avoir diffusion sans changement d'énergie, avec changement d'état atomique entre deux sous-niveaux.

figure (3.8) puisque l'état intermédiaire de diffusion ($|b; 1_j, 1_\ell\rangle$) contient deux photons (un dans le mode j , l'autre dans le mode ℓ).

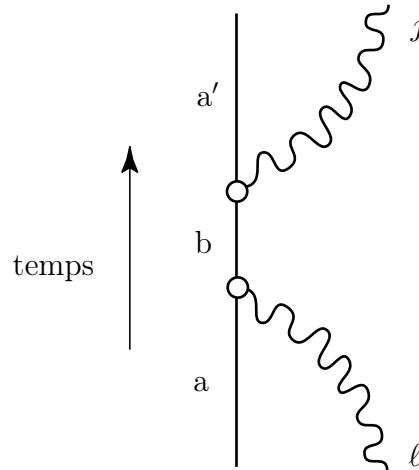


FIG. 3.7: Diffusion d'un photon du mode ℓ vers le mode j sous l'action de l'hamiltonien \hat{H}_{Π} au second ordre.

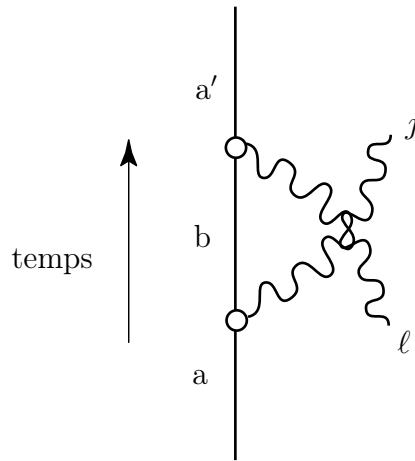


FIG. 3.8: Second processus de diffusion d'un photon du mode ℓ vers le mode j sous l'action de l'hamiltonien \hat{H}_{Π} au deuxième ordre. L'état intermédiaire où l'atome et le champ ont gagné de l'énergie, est fortement non résonnant.

L'hamiltonien d'interaction étant indépendant du temps, la transition ne peut se produire que si l'état initial $|a; 1_\ell\rangle$ et l'état final $|a'; 1_j\rangle$ ont la même énergie :

$$E_a + \hbar\omega_\ell = E_{a'} + \hbar\omega_j \quad (3.55)$$

En revanche, aucune condition de conservation de l'énergie n'est imposée sur l'étape intermédiaire du processus et E_b diffère généralement de $E_a + \hbar\omega_\ell$. On dit que l'excitation de l'état $|b\rangle$ est « virtuelle ». Il faut d'ailleurs remarquer que si le processus représenté sur la figure 3.7 est le plus intuitif, le diagramme de la figure 3.8 correspond au processus beaucoup moins évident a priori où l'atome émet un photon dans le mode j avant

d'absorber un photon dans le mode ℓ . Dans ce cas, l'état intermédiaire du processus de diffusion est $|b; 1_j, 1_\ell\rangle$. Cet état intermédiaire, où l'atome est dans l'état excité $|b\rangle$ et le champ possède un photon supplémentaire, a manifestement une énergie très supérieure à celle de l'état initial. Il doit pourtant être pris en compte.

En utilisant (3.12), nous pouvons récrire (3.54) sous la forme

$$\langle a'; 1_j | \hat{H}_I^{\text{eff}} | a; 1_\ell \rangle = \frac{q^2 \hbar}{m^2 \varepsilon_0 L^3 \sqrt{\omega_j \omega_\ell}} \sum_{\mathbf{b}} \left[\frac{\langle a' | \mathbf{p} \cdot \vec{\varepsilon}_j | b \rangle \langle b | \mathbf{p} \cdot \vec{\varepsilon}_\ell | a \rangle}{E_a - E_b + \hbar \omega_\ell} + \frac{\langle a' | \mathbf{p} \cdot \vec{\varepsilon}_\ell | b \rangle \langle b | \mathbf{p} \cdot \vec{\varepsilon}_j | a \rangle}{E_a - E_b - \hbar \omega_j} \right]. \quad (3.56a)$$

Si le mode incident ℓ contient n_ℓ photons, l'élément de matrice de couplage s'écrit

$$\langle a'; 1_j, n_\ell - 1 | \hat{H}_I^{\text{eff}} | a; 0_j, n_\ell \rangle = \sqrt{n_\ell} \langle a'; 1_j, 0 | \hat{H}_I^{\text{eff}} | a; 0_j, 1_\ell \rangle, \quad (3.56b)$$

ce qui est égal à l'élément de matrice (3.56a), associée à un seul photon incident, multipliée par $\sqrt{n_\ell}$. Comme pour le terme de diffusion associé à \hat{H}_{I2} (Équation 3.26), l'amplitude de diffusion est proportionnelle à la racine carrée du nombre de photons incidents.

De même que l'émission spontanée, les processus de diffusion couplent un état discret à un quasi-continuum d'états finaux, puisque les modes j forment un tel continuum (cf. Partie 3.3). La règle d'or de Fermi nous permet donc de calculer une probabilité de diffusion par unité de temps (*taux de transition*) du mode ℓ vers ce quasi-continuum, proportionnelle au carré du module de l'élément de matrice de transition. Ce taux de diffusion est donc proportionnel au nombre n_ℓ de photons présents dans le mode incident.

Écrivons, par analogie avec l'équation (3.40), le taux de diffusion depuis le mode ℓ (contenant n_ℓ photons) vers un mode j initialement vide, dont le vecteur d'onde \mathbf{k}_j pointe dans un angle solide $d\Omega$ autour de la direction (θ, φ) :

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega}(\vec{\varepsilon}_j, \theta, \varphi) = \frac{2\pi}{\hbar} n_\ell \left| \langle a'; 1_j | \hat{H}_I | a; 1_\ell \rangle \right|^2 \rho(\theta, \varphi; \hbar \omega_j = \hbar \omega_\ell + E_a - E_{a'}). \quad (3.57)$$

Dans cette équation, l'hamiltonien d'interaction \hat{H}_I vaut soit \hat{H}_{I2} , soit \hat{H}_I^{eff} (Équation 3.54), soit plus généralement la somme des deux. Lorsqu'on tient compte des expressions des éléments de matrice (Équations 3.26 ou 3.56) et de la densité d'état (3.39) on constate que le second membre de l'équation (3.57) est proportionnel à L^{-3} . Il s'agit d'un résultat a priori surprenant, puisque le volume L^3 , qui est choisi arbitrairement, devrait s'éliminer des résultats.

En fait, comme nous l'avons expliqué au chapitre 2 (§2.3.6), une onde progressive associée au mode ℓ a une *intensité* caractérisée non par le nombre n_ℓ photons dans le mode ℓ , mais par le *courant de photons* Π_ℓ^{phot} (flux de photons par unité de surface et de temps), qui est relié à l'éclairement Π_ℓ (puissance incidente par unité de surface) par l'équation

$$\Pi_\ell^{\text{phot}} = \frac{\Pi_\ell}{\hbar \omega_\ell}. \quad (3.58a)$$

On peut relier le courant de photons Π_ℓ^{phot} au nombre n_ℓ dans le mode en se souvenant qu'il y a n_ℓ/L^3 photons par unité de volume, se déplaçant à la vitesse c :

$$\Pi_\ell^{\text{phot}} = c \frac{n_\ell}{L^3} . \quad (3.58b)$$

En remplaçant n_ℓ par $\Pi_\ell^{\text{phot}} L^3/c$ dans (3.57), on obtient une relation qui ne contient plus L^3 , et qui permet de définir la *section efficace différentielle de diffusion* $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vec{\epsilon}_j, \theta, \varphi)$:

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega}(\vec{\epsilon}_j, \theta, \varphi) = c \frac{n_\ell}{L^3} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\vec{\epsilon}_j, \theta, \varphi) = \Pi_\ell^{\text{phot}} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\vec{\epsilon}_j, \theta, \varphi) . \quad (3.59)$$

En intégrant sur toutes les directions (θ, φ) et en sommant sur les deux polarisations orthogonales $\vec{\epsilon}'_j$ et $\vec{\epsilon}''_j$ de deux modes associés à chaque direction, on obtient la *section efficace totale de diffusion* d'un photon du mode ℓ :

$$\sigma = \int d\Omega \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vec{\epsilon}'_j, \theta, \varphi) + \frac{d\sigma}{d\Omega}(\vec{\epsilon}''_j, \theta, \varphi) \right) . \quad (3.60)$$

La section efficace est une quantité homogène à une surface que l'on peut se représenter de façon imagée comme la surface effective interceptant des photons dans le flux incident pour les diffuser.

3.4.2 Description qualitative de quelques processus de diffusion

a. Diffusion Rayleigh

La diffusion Rayleigh est un processus de diffusion élastique à basse énergie. Par processus de basse énergie on entend que l'énergie des photons est petite devant les énergies nécessaires pour porter réellement l'atome dans un état excité. Le processus de diffusion Rayleigh peut être représenté par le schéma de la figure 3.9.

Partant des expressions (3.25) et (3.56), il est possible de montrer⁸ que pour un atome à deux niveaux (fréquence de Bohr ω_0) la section efficace totale de diffusion, Rayleigh est égale à :

$$\sigma_R = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \frac{\omega^4}{\omega_0^4} . \quad (3.61)$$

Dans cette formule, ω est la fréquence des photons incidents (et diffusés) et r_0 est le « rayon classique de l'électron »⁹

$$r_0 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \quad (3.62)$$

qui vaut environ $2,8 \times 10^{-15} \text{m}$.

⁸Voir CDG 2, Exercice 3.

⁹Voir Complément 1A.

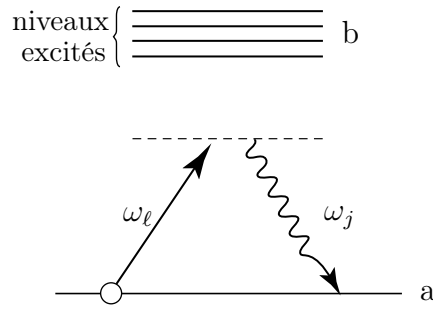


FIG. 3.9: *Diffusion Rayleigh. L'énergie du photon incident est plus petite que les énergies des états excités.*

On notera que la section efficace de diffusion Rayleigh σ_R varie comme la puissance quatrième de la pulsation ω , c'est-à-dire que le rayonnement de petite longueur d'onde est davantage diffusé que le rayonnement de grande longueur d'onde. Ainsi, dans le domaine visible, la diffusion est plus grande pour le bleu que pour le rouge, ce qui est à l'origine de la couleur bleue du ciel, car la diffusion de la lumière du soleil par les molécules atmosphériques est de type Rayleigh, associée à des résonances moléculaires électroniques dans l'ultra-violet.

Remarque

Loin de résonance, le modèle de l'atome à deux niveaux n'est pas très réaliste. On peut néanmoins montrer que la formule (3.61) reste valable, à condition d'y remplacer ω_0 par une fréquence effective de résonance atomique, définie par

$$\frac{1}{(\omega_0^{\text{eff}})^2} = \hbar^2 \sum_{b \neq a} \frac{f_{ab}}{(E_b - E_a)^2} \quad (3.63)$$

f_{ab} étant la force d'oscillateur de la transition $a \leftrightarrow b$ dont la définition est donnée en (3.53).

b. Diffusion Thomson

La diffusion Thomson est un processus de diffusion élastique à haute énergie, schématisé sur la Figure 3.10. Le terme « haute énergie » signifie en l'occurrence que l'énergie du photon est grande devant l'énergie d'ionisation E_I de l'atome.

Nous montrerons au paragraphe (3.56) que la section efficace de diffusion Thomson est égale à

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \quad (3.64)$$

où r_0 est la longueur définie en (3.62). Cette section efficace est indépendante de la fréquence des photons incidents. La diffusion Thomson est responsable de l'atténuation des rayons X lors de leur propagation dans la matière ; elle est d'autant plus forte qu'il y a plus d'électrons. La mesure de cette atténuation permet de déterminer la densité électronique d'un solide. Des mesures de ce type ont joué un rôle important dans la détermination du numéro atomique de certaines éléments encore mal connus au début du XX^{ème} siècle.

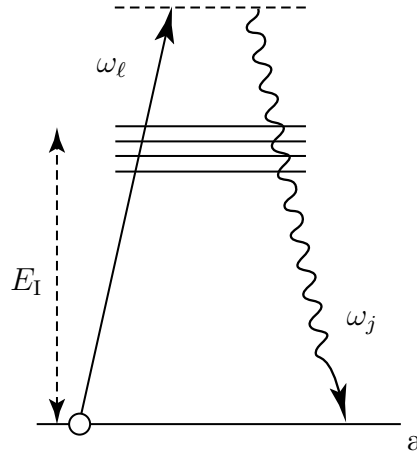


FIG. 3.10: *Diffusion Thomson. L'énergie du photon incident est plus grande que l'énergie de tous les états atomiques excités.*

C'est aussi ce phénomène qui est responsable des variations de transparence aux rayons X des tissus biologiques inhomogènes (principe de la radiographie X). On comprend ainsi que les éléments « lourds », dont le nombre d'électrons Z est élevé, sont peu transparents aux rayons X puisqu'ils diffusent beaucoup.

c. Diffusion résonnante

Lorsque la pulsation du photon incident est voisine d'une pulsation atomique ω_0 , on se trouve dans une situation intermédiaire entre les deux cas considérés précédemment. Il s'agit de la diffusion résonnante, schématisée sur la figure 3.11.

Dans ce processus, l'absorption d'un photon du mode ℓ à partir du niveau fondamental est pratiquement résonnante, puisque le passage de l'atome dans l'état excité $|b\rangle$ correspond à une étape du processus de diffusion qui conserve l'énergie. Si nous analysons les trois diagrammes possibles de diffusion (Figures 3.4, 3.7 et 3.8), nous constatons que seul le diagramme de la figure 3.7 possède une étape intermédiaire où le photon incident est absorbé et l'atome est dans l'état excité. Il s'ensuit que c'est ce diagramme qui a une contribution dominante dans le calcul de la diffusion résonnante et il décrit le cheminement physique réel du processus. Pour être plus précis, notons que lorsque $\hbar\omega_\ell$ devient très proche de $E_b - E_a$, une divergence apparaît dans le premier terme de la formule (3.56). Cette divergence est liée à l'utilisation de la théorie des perturbations au second ordre. Un traitement plus complet, faisant intervenir des termes d'ordre plus élevé de la série de perturbations, permet de l'éliminer. Le résultat d'une telle approche¹⁰ est qu'il faut ajouter un terme imaginaire $i\hbar\Gamma_{sp}/2$ au dénominateur résonnant de la formule (3.56), Γ_{sp} étant la largeur naturelle du niveau $|b\rangle$ donnée par la formule (3.46). Le calcul de la section efficace de diffusion quasi-résonnante (lorsque $\hbar\omega_\ell \approx E_b - E_a = \hbar\omega_0$), mené suivant

¹⁰Voir CDG 2, Chapitre III.

cette approche, donne finalement¹¹

$$\sigma_{\text{res}} = \frac{3\lambda_0^2}{2\pi} \frac{1}{1 + 4\frac{(\omega - \omega_0)^2}{\Gamma_{\text{sp}}^2}} \quad (3.65a)$$

où ω est la fréquence des photons incidents (et diffusés) et $\lambda_0 = 2\pi \frac{c}{\omega_0}$ est la longueur d'onde de résonance. À résonance exacte, on obtient la valeur

$$\Rightarrow \sigma_{\text{res}} = \frac{3\lambda_0^2}{2\pi}. \quad (3.65b)$$

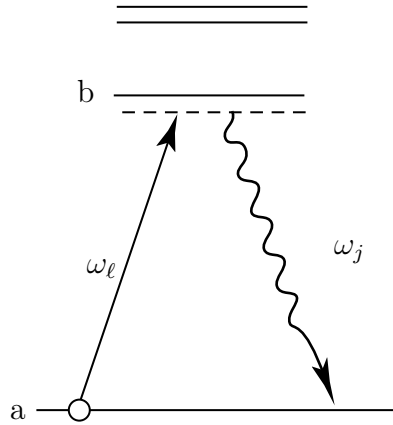


FIG. 3.11: Diffusion résonnante. L'énergie du photon incident est très voisine de l'énergie de l'un des états atomiques excités.

Il faut noter que la section efficace de diffusion à résonance exacte ne dépend que de la fréquence de résonance et pas des caractéristiques particulières des niveaux atomiques (en revanche Γ_{sp} en dépend). Pour les fréquences associées à la lumière visible, la valeur numérique de cette section efficace résonnante est beaucoup plus grande que celle des sections efficaces Rayleigh (3.61) ou Thomson (3.64). Un calcul élémentaire montre en effet que dans le domaine visible σ_{res} est plus grand que σ_{T} par environ 16 ordres de grandeur (λ_0 est de l'ordre 10^{-6} m, tandis que r_0 vaut $2,8 \times 10^{-15}$ m), la section efficace Rayleigh étant elle-même plus petite que la section efficace Thomson. Cette section efficace de diffusion résonnante, correspondant à une dimension de l'ordre de la longueur d'onde lumineuse, est remarquablement grande comparée aux « dimensions » atomiques (le rayon de Bohr vaut $0,5 \times 10^{-10}$ m).

Cette valeur numérique élevée rend le phénomène de diffusion résonnante facile à observer à l'œil nu sur une vapeur atomique (« résonance optique »). On a même pu observer la lumière diffusée par un seul ion ou atome piégé, éclairé par un laser résonnant. Ce fait surprenant se comprend bien si on réalise qu'un faisceau laser de 0,1 milliwatts

¹¹Voir CDG 2, Exercice 5.

transporte 10^{15} photons par seconde. Si le faisceau a un diamètre de 1 centimètre, l'ion va diffuser de l'ordre de 10^8 photons par seconde et un observateur placé à 0,3 mètre captera environ 10^4 photons par seconde ce qui est détectable par l'œil.

Remarques

(i) Le calcul classique de la diffusion d'une onde électromagnétique par un électron élastiquement lié (Complément 1A) donne des sections efficaces de diffusion qui ont la même forme que (3.61), (3.64) ou (3.65). Si la valeur quantique (3.63) de la section efficace de diffusion Rayleigh met en jeu la force d'oscillateur des transitions, c'est-à-dire les éléments de matrice dépendant des fonctions d'onde atomiques, il est remarquable de constater que les sections efficaces de diffusion Thomson (3.64), ou résonnante (3.65b), obtenues par les deux approches, sont exactement les mêmes.

On pourrait également montrer que la dépendance angulaire et en polarisation des sections efficaces différentielles obtenues par le calcul classique sont les mêmes que celles obtenues par le calcul quantique lorsque l'atome est dans un état $|a\rangle$ de moment cinétique $l = 0$.

(ii) L'expression (3.65) a été établie à l'ordre le plus bas vis-à-vis de l'intensité du champ incident et elle ne s'applique donc que lorsque l'intensité incidente est petite devant une intensité caractéristique appelée *intensité de saturation* $\Pi_{\text{sat}} = \frac{\pi}{3} \frac{hc\Gamma_{\text{sp}}}{\lambda_0^3}$ (typiquement de l'ordre de quelques milliwatts par centimètre carré). Quand l'intensité augmente, on voit apparaître de nouveaux phénomènes. D'une part l'intensité de la lumière diffusée sans changement de fréquence n'est plus proportionnelle à l'intensité incidente : c'est le phénomène de saturation. D'autre part il existe des processus non-linéaires faisant apparaître des photons à des fréquences différentes de celle du rayonnement incident (cf. Figure 3.13).

d. Diffusion Raman

La diffusion Raman est un processus de diffusion inélastique à basse énergie. Par opposition aux processus considérés précédemment, l'état atomique final $|a'\rangle$ diffère de l'état atomique initial $|a\rangle$ et la fréquence du photon diffusé diffère de la fréquence du photon incident. Le changement de fréquence du rayonnement est d'après (3.55) directement relié à l'intervalle d'énergie entre les niveaux a et a'

$$\hbar(\omega_\ell - \omega_j) = E_{a'} - E_a . \quad (3.66)$$

La diffusion Raman est schématisée sur la Figure 3.12.

La diffusion Raman est particulièrement utile en physique moléculaire car elle permet de mesurer des intervalles d'énergie entre des niveaux vibrationnels ou rotationnels appartenant au même niveau électronique fondamental. Pour de tels niveaux, une absorption directe de $|a\rangle$ vers $|a'\rangle$ est souvent interdite, alors que la diffusion Raman est permise.

3.4.3 Section efficace de diffusion Thomson

Dans ce paragraphe, nous allons mener jusqu'au bout, à titre d'exemple, le calcul de la section efficace de diffusion Thomson. Ainsi que nous l'avons mentionné précédemment, il

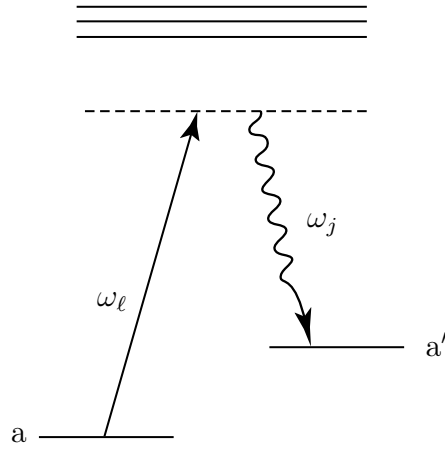


FIG. 3.12: Diffusion Raman. L'énergie du photon diffusé est différente de celle du photon incident. Il s'agit d'une diffusion inélastique.

faut en général, pour calculer une section efficace de diffusion, ajouter la contribution de \hat{H}_{I2} au premier ordre et celle de \hat{H}_{I1} au second ordre. Le cas de la diffusion Thomson est particulièrement simple parce que l'effet de \hat{H}_{I1} au second ordre peut être négligé, comme nous allons le montrer.

a. Contribution de \hat{H}_{I1} au second ordre

L'importance de cette contribution peut s'évaluer à partir de la formule (3.56) donnant l'élément de matrice

$$\langle a; 1_j | \hat{H}_I^{\text{eff}} | a; 1_\ell \rangle = \frac{q^2}{m^2} \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 L^3 \omega} \sum_b \left(\frac{\langle a | \hat{\mathbf{p}} \cdot \vec{\varepsilon}_1 | b \rangle \langle b | \hat{\mathbf{p}} \cdot \vec{\varepsilon}_\ell | a \rangle}{E_a - E_b + \hbar\omega} + \frac{\langle a | \hat{\mathbf{p}} \cdot \vec{\varepsilon}_\ell | b \rangle \langle b | \hat{\mathbf{p}} \cdot \vec{\varepsilon}_j | a \rangle}{E_a - E_b - \hbar\omega} \right) \quad (3.67)$$

où nous avons posé $\omega = \omega_\ell = \omega_j$ puisque la diffusion Thomson est élastique.

Dans une situation de diffusion Thomson, l'énergie $\hbar\omega$ des photons est très grande devant la différence des énergies atomiques $E_b - E_a$. Il est donc possible de négliger $E_b - E_a$ devant $\hbar\omega$ dans les dénominateurs des fractions de la formule (3.67). En utilisant la relation de fermeture

$$\sum_b |b\rangle \langle b| = 1$$

nous pouvons alors récrire (3.67) sous la forme

$$\langle a; 1_j | \hat{H}_I^{\text{eff}} | a; 1_\ell \rangle = \frac{q^2}{m^2 2\varepsilon_0 L^3 \omega^2} \langle a | [(\hat{\mathbf{p}} \cdot \vec{\varepsilon}_j)(\hat{\mathbf{p}} \cdot \vec{\varepsilon}_\ell) - (\hat{\mathbf{p}} \cdot \vec{\varepsilon}_\ell)(\hat{\mathbf{p}} \cdot \vec{\varepsilon}_j)] | a \rangle. \quad (3.68)$$

Comme deux composantes quelconques de $\hat{\mathbf{p}}$ commutent entre elles, on obtient

$$\langle a; 1_j | \hat{H}_I^{\text{eff}} | a; 1_\ell \rangle = 0. \quad (3.69)$$

La contribution de \hat{H}_{I1} au second ordre apparaît donc comme nulle dans les conditions de la diffusion Thomson¹².

b. Domaine de la diffusion Thomson

Avant de calculer la section efficace Thomson, il est utile de préciser dans quel domaine de fréquence ce calcul est justifié. En effet, nous avons fait des hypothèses qui limitent ce domaine de fréquence. D'une part, nous avons supposé que $\hbar\omega$ est très grand devant les énergies des transitions atomiques. Ceci implique que

$$\hbar\omega \gg E_I \quad (3.70)$$

où E_I est l'énergie d'ionisation de l'atome. À titre d'exemple rappelons que l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène¹³ est égale à

$$E_I = \frac{1}{2}\alpha^2 mc^2, \quad (3.71a)$$

α étant la constante de structure fine (1/137,xx).

D'autre part, nous avons fait l'approximation des grandes longueurs d'onde dans l'hamiltonien d'interaction ce qui signifie que

$$a_0 \ll \frac{c}{\omega} \quad (3.71b)$$

où a_0 est le rayon de Bohr, caractéristique des dimensions atomiques¹³, qui vaut

$$a_0 = \frac{1}{\alpha} \frac{\hbar}{mc} \quad (3.71c)$$

Nous pouvons en conclure que le domaine d'énergie de la diffusion Thomson obtenu à partir de (3.60) et (3.71) est

$$\frac{\alpha^2}{2} mc^2 \ll \hbar\omega \ll \alpha mc^2 \quad (3.72)$$

Il s'agit dans le cas de l'atome d'hydrogène, d'énergies comprises entre 14 eV et 3,6 keV, ou encore de longueurs d'onde comprises entre 90 nm (UV lointain) et 0,3 nm (rayons X).

c. Section efficace différentielle

Il est maintenant facile de calculer le taux de diffusion différentiel en utilisant la forme (3.57) dans laquelle l'hamiltonien d'interaction \hat{H}_I est pris égal à \hat{H}_{I2} (3.26) et la densité d'états a été calculée en (3.39). En utilisant la définition (3.59), on obtient la *section efficace différentielle de diffusion Thomson* du mode ℓ vers le mode j

$$\frac{d\sigma_T}{d\Omega} = r_0^2 (\vec{\epsilon}_j \cdot \vec{\epsilon}_\ell)^2. \quad (3.73)$$

¹²Un calcul plus précis tenant compte des termes suivants du développement en puissance de $(E_b - E_a)/\hbar\omega$ peut être fait. Il montre (voir CDG 2, Exercice 4) que la contribution de \hat{H}_{I1} au second ordre est plus petite que celle de \hat{H}_{I2} par un facteur de l'ordre de $(E_I/\hbar\omega)^2$.

¹³B.D., Chapitre X.

formule remarquablement simple, ne faisant intervenir que le produit scalaire des polarisations incidente et diffusée, et dans laquelle r_0 est le « rayon classique de l'électron » (3.62).

d. Section efficace totale

On l'obtient en sommant (3.73) sur les polarisations puis sur les directions d'émission du photon diffusé. Le calcul est identique à celui qui a été fait pour l'émission spontanée dans la partie 3.3.

La polarisation $\vec{\epsilon}_\ell$ du photon incident étant donnée, considérons une direction de diffusion \mathbf{k}_j faisant un angle θ avec $\vec{\epsilon}_\ell$. On peut choisir les deux polarisations possibles $\vec{\epsilon}_j$ et $\vec{\epsilon}'_j$ du photons diffusé, respectivement dans le plan $(\vec{\epsilon}_\ell, \mathbf{k}_j)$ et orthogonale à ce plan. Avec ce choix, la deuxième contribution est nulle

$$\vec{\epsilon}'_j \cdot \vec{\epsilon}_\ell = 0 \quad (3.74a)$$

tandis que la première donne

$$\vec{\epsilon}_j \cdot \vec{\epsilon}_\ell = \sin \theta . \quad (3.74b)$$

La section efficace différentielle de diffusion dans une direction faisant un angle θ avec la polarisation incidente vaut donc :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \sin^2 \theta . \quad (3.75)$$

En intégrant sur l'angle solide (cf. § 3.3.4), on obtient la section efficace totale de diffusion Thomson.

$$\implies \quad \sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \quad (3.76)$$

ce qui est l'expression présentée au paragraphe 3.4.2b.

3.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre quelques exemples de processus que nous avons décrits dans le cadre d'une théorie quantique du rayonnement (et des atomes). Comme nous l'avons signalé à plusieurs reprises, un avantage essentiel de la théorie quantique est que l'émission spontanée y est correctement décrite. Plus généralement, tout processus où des photons sont émis spontanément dans un mode initialement vide échappe à la description semi-classique et doit être traité par cette approche. Même si nous nous sommes restreints dans ce chapitre aux cas les plus simples – émission spontanée depuis un niveau discret, diffusion Thomson – il n'y a rien à ajouter au formalisme pour traiter quantitativement des processus plus complexes, comme la diffusion Raman (Figure 3.12).

Bien entendu, l'approche quantique de l'interaction rayonnement-atome permet également de traiter les processus dans lesquels tous les modes de rayonnement impliqués étaient déjà excités dans l'état initial. C'est le cas des diffusions stimulées, par exemple l'émission Raman stimulée. Dans ce cas, on sait qu'il est également possible d'utiliser le traitement semi-classique dans lequel le champ n'est pas quantifié. Le traitement quantique présente néanmoins l'avantage de traiter sur un même pied l'émission spontanée et l'émission induite. Cet avantage n'est pas que conceptuel. L'argument nous montre en effet que le calcul est essentiellement le même lorsqu'on considère les versions spontanée ou stimulée du même processus. Ceci permet souvent de simplifier le calcul quantique.

Indiquons également que même si nous n'avons décrit que des processus résultant d'un développement perturbatif à l'ordre 1 ou 2 de l'hamiltonien d'interaction, rien (sinon la difficulté croissante des calculs) n'interdit d'envisager des processus d'ordre plus élevé où plusieurs photons d'émission spontanée sont émis au cours du même processus. Considérons par exemple la situation de *fluorescence résonnante*, dans laquelle un atome à deux niveaux est irradié par un rayonnement de fréquence ω , quasi-résonnant avec la transition atomique de fréquence ω_0 . Nous avons décrit au paragraphe 3.4.2c le phénomène de diffusion élastique (Figure 3.11), dans lequel la lumière diffusée est de même fréquence ω que la lumière incidente. Mais si le rayonnement est suffisamment intense on voit apparaître en plus, dans le spectre de la lumière diffusée, deux raies centrées en ω_0 et $2\omega - \omega_0$. À l'ordre le plus bas, ce processus peut être décrit par le diagramme de la figure 3.13, dans lequel deux photons ω disparaissent et deux photons sont créés¹⁴ avec des fréquences ω' et ω'' voisines de ω_0 et $2\omega - \omega_0$. Ces fréquences correspondent aux bandes latérales du « triplet de fluorescence de résonance »¹⁵.

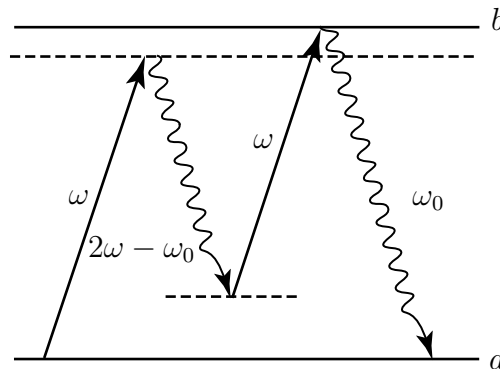


FIG. 3.13: *Processus de diffusion d'ordre supérieur, dans lequel deux photons incidents disparaissent et deux photons apparaissent avec des fréquences différentes. Ce processus est à l'origine des bandes latérales du triplet de fluorescence résonnante.*

Lorsque l'intensité du rayonnement incident est de plus en plus forte, il faut prendre en compte des termes d'interaction d'ordre de plus en plus élevé. Il est alors souvent

¹⁴Les photons fortement corrélés produits dans ce type de processus constituent des sources d'états non-classiques du rayonnement. Voir par exemple C. Fabre, Physics Report 219, page 215 (1992), ou H.J. Kimble, Physics Report 219, page 227 (1992).

¹⁵B.R.Mollow, J. Phys. A8, page L130 (1975).

fructueux d'adopter une approche beaucoup plus puissante, celle de *l'atome habillé par les photons*¹⁶. Cette approche, qui fournit à la fois des méthodes de calcul plus simples et des images claires, pousse à son terme la démarche consistant à considérer *l'atome et le rayonnement en interaction* comme un *système quantique global*. Elle est donc un prolongement naturel de la description de l'atome et du rayonnement mise en place dans ce chapitre.

Il convient ainsi de voir dans ce chapitre plus que l'aboutissement d'une théorie cohérente. C'est en fait le point de départ de la compréhension des développements modernes de l'optique quantique et de la physique de l'interaction matière-rayonnement.

¹⁶Cette approche, développée par C. Cohen-Tannoudji et ses élèves, est exposée dans CDG 2, Chapitre VI.

Complément 3A

Électrodynamique en cavité

Dans l'étude de l'interaction atome-rayonnement, on ne se préoccupe généralement pas de l'environnement dans lequel évolue l'atome qui interagit avec le rayonnement. On suppose implicitement que le rayonnement évolue dans l'espace libre, et qu'il n'y a pas de parois susceptibles de renvoyer le champ rayonné sur l'atome. Nous allons voir dans ce complément que lorsque le champ électromagnétique ne se propage pas dans l'espace libre, mais est *confiné à l'intérieur d'une cavité résonnante*, les propriétés radiatives d'un atome situé dans la cavité (par exemple le spectre d'absorption et l'émission spontanée) peuvent être fortement modifiées si la cavité possède des parois suffisamment réfléchissantes, même si celles-ci sont très éloignées de l'atome à l'échelle des dimensions atomiques.

Les conditions nécessaires pour observer de tels *effets d'électrodynamique en cavité* sont très difficiles à obtenir en pratique, et le plus souvent on peut effectivement supposer que les propriétés radiatives d'un atome sont indépendantes des parois qui l'entourent. Néanmoins, grâce à de très belles et très difficiles expériences, certains de ces effets ont été observés¹ De plus, ce domaine est l'objet de recherches très actives de la part de laboratoires industriels dans le domaine des télécommunications optiques : on espère, grâce à des effets d'électrodynamique en cavité, améliorer le fonctionnement des lasers à semi-conducteurs et en particulier abaisser leur seuil d'oscillation et donc augmenter leur rendement². On rencontre ici encore un exemple où des recherches de nature très fondamentale sur l'interaction matière-rayonnement débouchent sur des possibilités d'innovation technologique.

¹Pour une revue détaillée du domaine, on pourra se référer à l'article dans *Physics Today* « Cavity quantum electrodynamics », S. Haroche, D. Kleppner Janv. 1989, p. 24 ou bien en cours de l'École d'été des Houches de S. Haroche, p. 771 paru dans « Systèmes fondamentaux en Optique Quantique », Les Houches, Session 53, J. Dalibard et al. eds, North Holland (1992).

²Voir par exemple Y. Yamamoto, S. Machida, K. Igeta, G. Igeta, G. Bjork, p. 561, dans « Coherence, Amplification and Quantum effects in Semi-Conductor Lasers », Y. Yamamoto ed., Wiley (1991).

3A.1 Présentation du problème

Considérons le système schématisé sur la figure 3A.1 : un atome immobile à l'origine des coordonnées est placé dans une cavité de volume V , aux parois parfaitement réfléchissantes. À cause des conditions aux limites imposées par la cavité, le champ à l'intérieur de celle-ci ne peut exister que dans une superposition de *modes propres* dépendant de la géométrie du système et ayant des *fréquences propres* parfaitement déterminées. Dans la géométrie parallélépipédique de la figure 3A.1, ces modes sont les ondes stationnaires planes dans les directions Ox, Oy, Oz dont le champ électrique s'annule sur les parois.

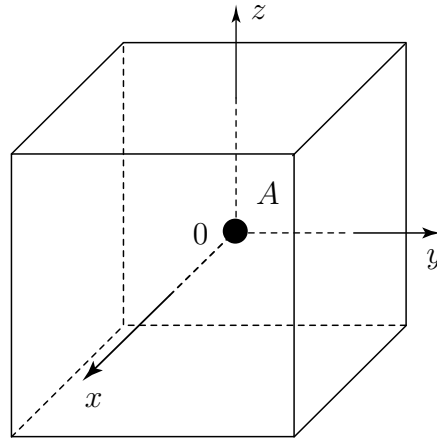


FIG. 3A.1: Système formé d'un atome à deux niveaux A à l'origine des coordonnées placé dans une cavité électromagnétique parallélépipédique aux parois parfaitement réfléchissantes.

Dans ce complément, nous nous placerons dans le cas simple où tous les modes de la cavité ont des fréquences très différentes des fréquences de Bohr de l'atome, à l'exception d'un seul mode qui se trouve être quasiment à résonance avec la transition reliant l'état fondamental $|a\rangle$ à un niveau excité unique $|b\rangle$. Parmi l'ensemble infini de modes du champ et de niveaux atomiques en interaction, il est alors possible, pour déterminer l'évolution du système, d'isoler *ce mode unique* de fréquence ω et de polarisation $\vec{\epsilon}$; de même, on ne gardera que *le sous-système atomique formé des deux niveaux* $|a\rangle$ et $|b\rangle$, caractérisé par sa fréquence de Bohr ω_0 . Nous supposons également que nous pouvons utiliser l'approximation des grandes longueurs d'onde. Toutes ces hypothèses permettent de simplifier considérablement la résolution du problème quantique.

Dans la situation considérée ici, le volume fictif que nous avons utilisé pour obtenir un ensemble discret de modes propres du champ de rayonnement est donc remplacé par un volume réel³, et les observables comme l'opérateur \hat{N} (nombre de photon total à l'intérieur du volume V) correspondent maintenant à des mesures possibles.

³Les conditions de quantification sont cependant légèrement différentes, puisque nous avons utilisé des « conditions aux limites périodiques » pour définir les modes dans le volume fictif, alors que nous utilisons ici des conditions d'annulation du champ électrique à la surface de la paroi conductrice. Les modes propres sont donc des *ondes progressives* dans le premier cas, et des *ondes stationnaires* dans le deuxième.

Remarque

- (i) À la différence du volume fictif des chapitres 2 et 3, dont on pouvait choisir arbitrairement la forme, la cavité réelle n'est pas nécessairement cubique. C'est pour souligner cette différence que nous utilisons la notation V , et non L^3 , pour désigner le volume de la cavité.
- (ii) Dans la réalité, on peut citer deux situations expérimentales correspondant grosso modo au modèle théorique simple que nous venons de définir :
- La cavité, de dimension centimétrique, est en métal supraconducteur (voir figure 3A.2a). Ses modes propres ont des fréquences de l'ordre de 50 GHz . Elle comporte des trous de petite taille qui laissent passer des atomes portés dans des états très excités, ou « états de Rydberg », analogues aux états propres de l'atome d'hydrogène de nombre quantique principal n élevé. La transition atomique quasi-résonnante a lieu entre deux niveaux de nombre quantique principal n et $n + 1$, avec n typiquement de quelques dizaines.

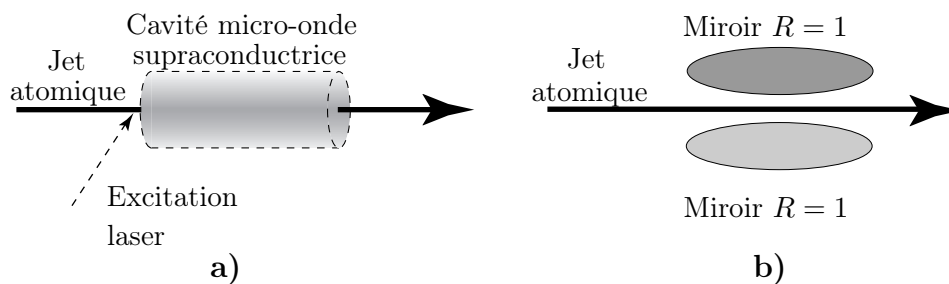


FIG. 3A.2: Deux situations expérimentales proches de la configuration théorique de la figure 3A.1. **a)** Interaction entre un jet d'atomes portés par irradiation laser dans un état très excité (état de Rydberg) et une cavité métallique supraconductrice fermée. Le rayonnement est alors dans le domaine micro-onde. **b)** Interaction entre un jet d'atomes alcalins dans l'état fondamental et une cavité Fabry-Perot de très grande finesse : le rayonnement est dans le domaine visible.

- La cavité est de type Fabry-Perot (voir Complément V.1). Elle comporte des miroirs extrêmement réfléchissants pour les longueurs d'onde optiques (voir figure 3A.2b), séparés par moins d'un millimètre. Des atomes traversent cette cavité. On peut montrer qu'il est possible de négliger le couplage de l'atome avec tous les autres modes si les niveaux atomiques sont suffisamment séparés (c'est le cas pour la transition entre le niveau fondamental et le premier niveau excité d'un atome alcalin comme le césium) et si la finesse de la cavité est suffisamment grande (on peut obtenir des finesses aussi grandes que 10^6).

3A.2 Modes propres du système couplé {atome + cavité}

a. Restriction de l'hamiltonien à l'espace des états du système

Comme dans le paragraphe 3.1.1 du chapitre 3, l'espace des états permettant de décrire l'évolution du système est constitué par le produit tensoriel de l'espace des états de l'atome à deux niveaux, sous-tendu par les vecteurs $|a\rangle$ et $|b\rangle$, et de l'espace des états d'un mode unique du champ, dont la base naturelle est celle des états nombre $|n\rangle$. Une base possible de l'espace produit est constituée par le produit tensoriel des bases de l'atome et du

rayonnement :

$$\{|i, n\rangle = |a\rangle \otimes |n\rangle \text{ ou } |b\rangle \otimes |n\rangle, \text{ avec } i = a \text{ ou } b, \text{ et } n = 0, 1, \dots\}. \quad (3A.1)$$

L'hamiltonien total est donné par l'équation (3.2). Dans le sous espace défini en (1), les hamiltoniens de l'atome et du rayonnement valent respectivement :

$$\hat{H}_P = \hbar\omega_0|b\rangle\langle b| \quad (3A.2)$$

$$\hat{H}_R = \hbar\omega\hat{a}^+\hat{a} \quad (3A.3)$$

Par rapport aux expressions du chapitre 3 et pour simplifier, le zéro d'énergie du système a été déplacé pour coïncider avec l'énergie de l'état $|a, 0\rangle$. Quand au terme d'interaction, donné de manière générale par les expressions (3.12) et (3.13), il s'écrit dans le cas mono-mode, à l'approximation des grandes longueurs d'onde, et en tenant compte du fait que l'atome est à l'origine des coordonnées, sous la forme

$$\hat{H}_I = -\frac{q}{m}\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega V}}\hat{\mathbf{p}}\cdot\vec{\varepsilon}(\hat{a}+\hat{a}^+) + \frac{q^2}{2m}\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega V}(\hat{a}+\hat{a}^+)^2 \quad (3A.4)$$

où V est le volume de la cavité utilisée. Le deuxième terme de l'expression 3A.4, issu du terme en $\hat{\mathbf{A}}^2$ dans l'hamiltonien d'interaction, est un opérateur agissant uniquement sur les variables de champ. Il modifie légèrement les états propres et les énergies, mais n'intervient pas dans le couplage entre l'atome et le rayonnement. Nous nous placerons dans une situation où ces effets sont négligeables. D'autre part, nous savons que pour des raisons de parité, l'opérateur $\hat{\mathbf{p}}$ n'a pas d'éléments diagonaux sur la base des états atomiques. On peut donc écrire

$$\hat{H}_I = \frac{\hbar\Omega_R}{2}\{|a\rangle\langle b| + |b\rangle\langle a|\}(\hat{a} + \hat{a}^+), \quad (3A.5)$$

en supposant $\langle a|\vec{\varepsilon}|b\rangle$ réel, et en posant

$$\Omega_R = -\frac{2q}{m}\frac{1}{\sqrt{2\hbar\varepsilon_0\omega V}}\langle a|\hat{\mathbf{p}}\cdot\vec{\varepsilon}|b\rangle. \quad (3A.6)$$

Cette expression est analogue à la formule (3.23b), au facteur $\sqrt{n_j}$ près. La pulsation Ω_R s'appelle « pulsation de Rabi pour un photon ». Dans la configuration de la figure (3A.2a), pour un volume V de 1 cm^3 , une transition de fréquence 50 GHz et un élément de matrice de \hat{p}_z égal à $-i\omega m\langle \hat{z} \rangle$ (voir la formule 3.49a) avec $\langle \hat{z} \rangle \approx n^2 a_0 \approx 250\text{ nm}$, la fréquence de Rabi pour un photon $\Omega_R/2\pi$ est de l'ordre de 100 kHz.

Remarque

Ce modèle simplifié d'interaction atome-rayonnement, où un atome à deux niveaux interagit avec un seul mode du rayonnement, est connu sous le nom de « modèle de Jaynes et Cummings »⁴.

⁴E.T. Jaynes et F.W. Cummings, Proc. IEEE 51, 89 (1963).

b. Niveaux d'énergie en l'absence de couplage \hat{H}_I

Pour déterminer l'évolution du système, il faut connaître les états propres de l'hamiltonien et les énergies correspondantes. Commençons par considérer l'hamiltonien $\hat{H}_P + \hat{H}_R$, qui ne prend pas en compte le couplage entre atome et rayonnement. Ses états propres sont les états « découplés » $|i, n\rangle$ d'énergie $n\hbar\omega$ ou $n\hbar\omega + \hbar\omega_0$ suivant que $i = a$ ou $i = b$. Ces états sont une base de l'espace des états du système couplé : c'est celle que nous utiliserons.

La figure (3A.3a) indique les valeurs propres (énergies) de l'hamiltonien découplé $\hat{H}_P + \hat{H}_R$. L'état propre d'énergie minimale est l'état $|a, 0\rangle$, dont l'énergie a été prise comme zéro d'énergie du problème. Puisque $\omega \approx \omega_0$, les niveaux d'énergie se regroupent en *multiplicités* formées de deux états (à l'exception de l'état fondamental) séparés de $\hbar\delta = \hbar(\omega - \omega_0)$, les multiplicités étant séparées entre elles d'une quantité beaucoup plus grande, de l'ordre de $\hbar\omega$.

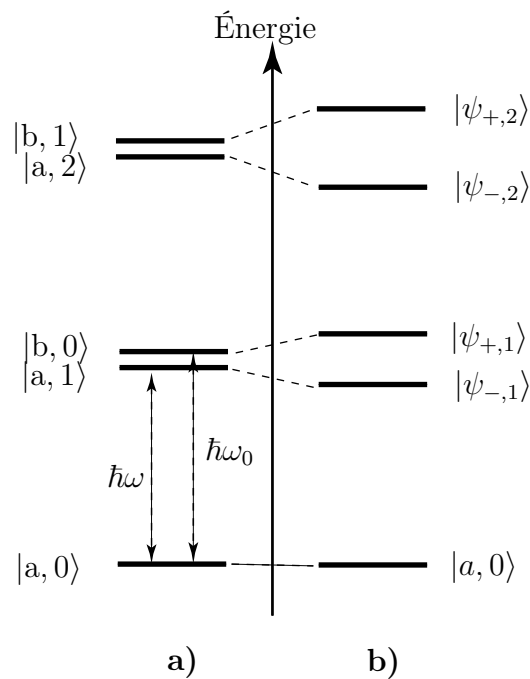


FIG. 3A.3: Niveaux d'énergie du système atome-champ en l'absence (a), et en présence (b) du couplage atome-rayonnement.

c. Diagonalisation approchée de l'hamiltonien total

Rajoutons maintenant l'effet de l'interaction. Il nous faut tout d'abord connaître les éléments de matrice de \hat{H}_I , qui valent :

$$\langle i, n | \hat{H}_I | i', n' \rangle = \frac{\hbar\Omega_R}{2} \{ \langle i | a \rangle \langle b | i' \rangle + \langle i | b \rangle \langle a | i' \rangle \} \langle n | (\hat{a} + \hat{a}^+) | n' \rangle \quad (3A.7)$$

Ils sont différents de zéro si et seulement si $i = a$ et $i' = b$, ou $i = b$ et $i' = a$, avec $n' = n \pm 1$. L'hamiltonien de couplage \hat{H}_I n'a pas d'éléments de matrice diagonaux. Il

connecte d'une part les deux états $|a, n\rangle$ et $|b, n-1\rangle$ à l'intérieur de la multiplicité M_n , avec un élément de matrice ayant pour valeur $\langle a, n | \hat{H}_I | b, n-1 \rangle = \frac{1}{2} \hbar \Omega_R \sqrt{n}$. Il connecte d'autre part des états entre multiplicité M_n et $M_{n\pm 2}$ avec un élément de matrice du même ordre de grandeur.

La diagonalisation exacte de cet hamiltonien n'est pas possible. Mais, compte tenu du regroupement des niveaux en multiplicités très éloignées les unes des autres dans le cas où $|\delta| \ll \omega$, nous pouvons négliger les couplages entre multiplicités différentes, puisqu'un couplage constant n'a des effets importants qu'entre états d'énergies voisines. Nous nous limiterons donc à diagonaliser la *restriction de l'hamiltonien à chaque multiplicité*. Il est facile de se convaincre que cette approximation donne le résultat exact à des termes en $\langle \hat{H} \rangle / \hbar \omega = \sqrt{n} \Omega_R / 2\omega$ près. Cette approximation est équivalente à l'approximation résonnante faite au chapitre 2 du cours « Optique Quantique 1 » (§ 2.3.2).

À l'approximation résonnante, l'hamiltonien d'interaction s'écrit sous la forme opératorielle :

$$\hat{H}_I = \frac{\hbar \Omega_R}{2} \{ |a\rangle \langle b | \hat{a}^+ + |b\rangle \langle a | \hat{a} \} . \quad (3A.8)$$

À l'intérieur de la multiplicité $\{|b, n-1\rangle, |a, n\rangle\}$, il s'écrit sous forme matricielle

$$\hat{H} = \hbar \begin{bmatrix} n\omega & \frac{\Omega_R \sqrt{n}}{2} \\ \frac{\Omega_R \sqrt{n}}{2} & n\omega - \delta \end{bmatrix} . \quad (3A.9)$$

Les vecteurs propres et valeurs propres résultant de la diagonalisation d'une matrice 2×2 sont bien connus (voir par exemple le paragraphe 1.2.6 du cours « Optique Quantique 1 »). On obtient ici les énergies propres

$$E_{\pm, n} = \hbar \left(n\omega - \frac{\delta}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{n\Omega_R^2 + \delta^2} \right) , \quad (3A.10)$$

correspondant aux états propres $|\psi_{\pm, n}\rangle$:

$$\begin{aligned} |\psi_{+, n}\rangle &= \cos \theta_n |a, n\rangle + \sin \theta_n |b, n-1\rangle , \\ |\psi_{-, n}\rangle &= -\sin \theta_n |a, n\rangle + \cos \theta_n |b, n-1\rangle , \end{aligned} \quad (3A.11a)$$

avec

$$\tan 2\theta_n = \frac{-\Omega_R \sqrt{n}}{\delta} . \quad (3A.11b)$$

Sous l'effet du couplage, les niveaux d'énergie à l'intérieur de chaque multiplicité se repoussent (voir Figure 3A.3b). Le niveau fondamental $|a, 0\rangle$, qui est isolé, n'est pas affecté par l'interaction, du moins au niveau d'approximation considéré ici.

La figure 3A.4 donne l'allure des niveaux d'énergie du système couplé {atome+cavité} en fonction du désaccord δ (Équation 3A.10). On obtient pour chaque multiplicité un

« croisement évité »⁵ autour de $\delta = 0$. À résonance exacte, l'écart énergétique entre les deux niveaux vaut $\sqrt{n}\hbar\Omega_R$, le paramètre θ_n est égal à $\pi/4$ et les états propres $|\psi_{\pm,n}\rangle$ prennent alors une forme extrêmement simple :

$$|\psi_{\pm,n}(\delta = 0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm|a,n\rangle + |b,n-1\rangle). \quad (3A.12)$$

Ces états sont des *états intriqués* de l'atome et du rayonnement. Il est impossible de les factoriser en une partie atomique et une partie rayonnement, ce qui est révélateur d'une extrême corrélation entre les deux parties du système. On a coutume de les appeler *états de l'« atome habillé »* (sous-entendu = *par les photons*). Lorsque le désaccord $|\delta|$ augmente, le paramètre θ_n tend vers 0 ou $\pi/2$ et les deux états propres tendent vers les états factorisés $|a,n\rangle$ et $|b,n-1\rangle$, pour lesquels il n'y a pas de corrélation.

La figure 3A.4 ne montre que les niveaux de plus basse énergie. Lorsqu'on s'élève dans le diagramme, l'allure générale est la même, mais la séparation des niveaux à résonance augmente proportionnellement à \sqrt{n} , la pente moyenne de la multiplicité augmente en $(n - \frac{1}{2})\hbar\omega$.

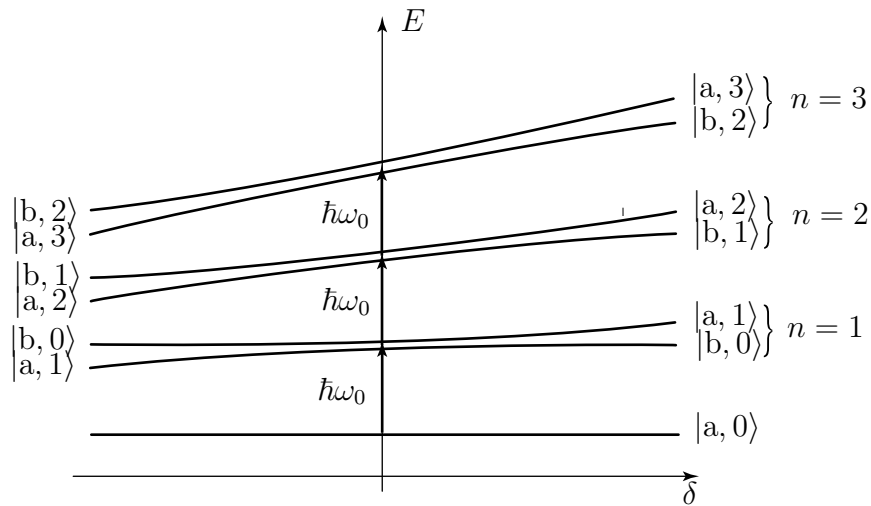


FIG. 3A.4: Premiers niveaux d'énergie du système couplé atome-cavité en fonction du désaccord $\delta = \omega - \omega_0$. Les traits en pointillé, qui sont les asymptotes des croisements évités, sont aussi les niveaux d'énergie en l'absence de terme d'interaction. Loin de résonance, les états propres sont des états factorisés, $|a,n\rangle$ ou $|b,n\rangle$. À résonance ($\delta = 0$), les états propres sont des états intriqués du type $\frac{1}{\sqrt{2}}(|a,n\rangle \pm |b,n-1\rangle)$.

⁵On emploie également le terme « anticroisement » pour décrire ce comportement des niveaux d'énergie.

3A.3 Émission spontanée de l'atome excité à l'intérieur de la cavité

Plaçons-nous dans la situation où le système est constitué à l'instant initial de l'atome dans l'état excité placé dans la cavité vide de rayonnement. La cavité est supposée exactement résonnante avec la transition atomique ($\delta = 0$). L'état initial s'écrit donc $|\psi(0)\rangle = |b, 0\rangle$. Ce n'est pas un état propre de l'hamiltonien total, donc pas un état stationnaire. Appartenant à la multiplicité $n = 1$, il se décompose sur la base des états propres de l'hamiltonien $|\psi_{\pm,1}\rangle$:

$$|\psi(0)\rangle = |b, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_{+,1}\rangle + |\psi_{-,1}\rangle) \quad (3A.13)$$

On en déduit qu'à tout instant ultérieur :

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_{+,1}\rangle e^{-iE_{+,1}t/\hbar} + |\psi_{-,1}\rangle e^{-iE_{-,1}t/\hbar}) \\ &= e^{-i\omega t} \left(-i|a, 1\rangle \sin \frac{\Omega_R}{2}t + |b, 0\rangle \cos \frac{\Omega_R}{2}t \right) \end{aligned} \quad (3A.14)$$

La probabilité $P_b(t)$ de trouver l'atome dans l'état excité est donc égale à

$$P_b(t) = \sum_n |\langle b, n | \psi(t) \rangle|^2 = |\langle b, 0 | \psi(t) \rangle|^2 = \cos^2 \left(\frac{\Omega_R t}{2} \right) \quad (3A.15)$$

L'évolution spontanée de l'atome excité placé dans la cavité est donc sinusoidale. *Ce comportement est très différent de l'émission spontanée dans le vide.* On a en effet un couplage entre niveaux discrets, et donc une évolution de type oscillation de Rabi, alors que dans le vide, on a un couplage avec un continuum d'états finaux, et donc une évolution exponentielle décroissante. Notons que le système oscille entre les états $|b, 0\rangle$ et $|a, 1\rangle$ et qu'il revient périodiquement dans l'état initial. On peut se représenter la situation en disant que l'atome excité émet un photon dans le mode de la cavité qui est maintenant excité, tandis que l'atome passe dans l'état fondamental (état $|a, 1\rangle$). La cavité étant supposée sans pertes, le rayonnement est ensuite réabsorbé par l'atome qui se retrouve dans l'état excité, la cavité étant à nouveau vide. Le système est alors prêt à un nouveau cycle de ce qu'on peut appeler des « *oscillations de Rabi à un photon* »⁶.

Considérons maintenant une cavité qui n'est pas en résonance avec la transition atomique. Un calcul identique à celui qui vient d'être présenté montre que la probabilité que l'atome reste dans l'état excité vaut maintenant :

$$P_b(t) = 1 - \frac{\Omega_R^2}{\delta^2 + \Omega_R^2} \sin^2 \left(\sqrt{\delta^2 + \Omega_R^2} t / 2 \right) \quad (3A.16)$$

Cette probabilité reste proche de 1 dès que $\delta \gg \Omega_R$. L'atome reste donc constamment dans l'état excité et cela même à des temps très longs.

⁶On trouve aussi parfois dans la littérature l'expression « oscillation de Rabi du vide ».

Dans les deux cas considérés ci-dessus, l'atome excité a un comportement radicalement différent de celui qu'il aurait eu dans le vide. Pour une cavité à résonance, il oscille entre l'état excité et l'état fondamental, au lieu de se désexciter de façon irréversible. Hors de résonance, l'atome reste dans l'état excité. L'émission spontanée a donc été *inhibée* dans la cavité, parce que les photons susceptibles d'être émis par l'émission spontanée ne forment plus un quasi-continuum autour de la transition atomique. On voit ainsi que *l'émission spontanée n'est pas une propriété intrinsèque de l'atome*, mais plutôt celle de l'atome en présence d'un environnement déterminé.

Remarque

- (i) Dans une situation réelle, la cavité a des pertes et le comportement est un peu moins pur. Néanmoins, si ces pertes sont suffisamment faibles, on peut observer les deux comportements typiques (voir paragraphe 3A.6). À résonance, on a une désexcitation irréversible de l'atome avec une constante de temps beaucoup plus longue que celle associée à l'émission spontanée habituelle, qui est donc bien inhibée.
- (ii) On peut envisager d'autres moyens d'inhiber l'émission spontanée, par exemple en plaçant l'atome dans un milieu « à bande photonique interdite »⁷. Dans un tel milieu, caractérisé par des propriétés périodiques (par exemple de l'indice de réfraction), il existe des bandes interdites d'énergie pour les photons, analogues aux bandes interdites électroniques dans les cristaux⁸. Si la fréquence atomique ω_0 tombe dans une bande interdite, l'émission spontanée sera inhibée.

3A.4 Spectroscopie du système atome-cavité

Le système couplé atome-cavité peut être « sondé » de l'extérieur. Dans le cas de la figure 3A.2b, on peut par exemple faire interagir le système avec un très faible champ laser de fréquence ω , pénétrant par les côtés de la cavité Fabry-Perot. Nous traiterons classiquement ce champ sonde et le terme d'interaction correspondant \hat{H}_S s'écrit :

$$\hat{H}_S = \frac{q}{m} \mathbf{A}_S \cdot \hat{\mathbf{p}} \cos \omega_s t \quad (3A.17)$$

où \mathbf{A}_S est le potentiel vecteur du champ sonde. L'hamiltonien \hat{H}_S a des éléments de matrice non-nuls entre l'état fondamental $|a, 0\rangle$ et d'autres états propres $|\psi_{\pm, n}\rangle$. Plus précisément :

$$\begin{aligned} \langle a, 0 | \hat{H}_S | \psi_{+, n} \rangle &= \hbar \Omega_S \cos \omega_s t \sin \theta_1 \delta_{n, 1} , \\ \langle a, 0 | \hat{H}_S | \psi_{-, n} \rangle &= \hbar \Omega_S \cos \omega_s t \cos \theta_1 \delta_{n, 1} , \end{aligned} \quad (3A.18)$$

avec $\hbar \Omega_S = -q/m \langle a | \mathbf{A}_s \cdot \hat{\mathbf{p}} | b \rangle$.

Supposons que le système est initialement dans son état fondamental $||a, 0\rangle$. Un raisonnement analogue à celui du chapitre 2 du cours « Optique Quantique 1 » montre que la

⁷E. Yablonovitch, Phys. Rev. Lett. 58, 2059 (1987).

⁸Voir par exemple : Y. Quéré, *Physique des matériaux*, Cours de l'École polytechnique, Ellipses (1988) ; B. Sapoval et C. Hermann, *Physique des semi-conducteurs*, Cours de l'École polytechnique, Ellipses (1990).

probabilité de transition sous l'effet de la sonde présente une variation résonnante lorsque ω_s est égal à une fréquence de Bohr du système global. Ainsi, l'absorption de la sonde sera maximale pour une transition reliant l'état fondamental $|a, 0\rangle$ aux états $|\psi_{\pm,1}\rangle$, dont la fréquence est $\omega_S = E_{\pm,1}/\hbar$. Le spectre d'absorption de la sonde est donc constitué d'un *doublet* qui évolue avec le désaccord atome-cavité selon les deux courbes de la figure 3A.4. Une telle expérience permet donc de mesurer directement les énergies de l'atome habillé⁹.

3A.5 Évolution en présence d'un champ intracavité

Nous considérons maintenant le cas où la cavité contient du rayonnement. Pour simplifier les calculs de ce paragraphe, nous nous placerons dans le cas d'une cavité résonnante avec l'atome ($\delta = 0$). Nous déterminerons l'évolution du système en fonction de l'état du champ qui règne dans la cavité.

a. Cas où le champ est initialement dans un état nombre

Ce calcul a déjà été fait dans le chapitre 3, paragraphe (3.17). On retrouve, comme dans le cas du vide, un comportement de type oscillation de Rabi, mais avec une pulsation égale à $\Omega_n = \sqrt{n+1}\Omega_R$. Ce comportement ressemble beaucoup à celui d'un atome en présence d'une onde électromagnétique classique, décrit dans le cours « Optique Quantique 1 », paragraphe (2.3.2), mais il y a tout de même une importante différence : les états entre lesquels le système oscille sont des *états non-factorisables*, ou « *intriqués* ». Considérons en particulier le cas d'une « impulsion $\pi/2$ », où l'interaction atome-champ est stoppée à l'instant T tel que $\Omega_n T = \pi/2$ (ce temps correspond par exemple au temps de traversée de la cavité par l'atome). Le système, partant de l'état initial $|b, n\rangle$, se retrouve dans l'état :

$$|\psi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i|a, n+1\rangle + |b, n\rangle) . \quad (3A.19)$$

Dans cet état, les mesures de champ ou d'état atomique sont parfaitement corrélées : si on trouve l'atome dans l'état a (resp b), on est *absolument sûr* que la cavité contient $n+1$ photons (resp n), même si la mesure de l'état atomique a été effectuée sur un atome qui a quitté la cavité. Cet état réalise une situation du type décrit par Einstein, Podolski et Rosen¹⁰ et illustre *la non-localité* de la Mécanique Quantique.

Une autre différence notable est qu'ici les valeurs moyennes du dipôle atomique $\langle\psi(t)|\hat{\mathbf{D}}|\psi(t)\rangle$ et du champ électrique $\langle\psi(t)|\hat{\mathbf{E}}|\psi(t)\rangle$ sont nulles à tout instant, alors que ce n'est pas le cas lorsque l'atome interagit avec un champ classique.

⁹Il existe d'autres manières de mesurer les énergies propres de l'atome habillé. On peut par exemple exciter le système et regarder sa fluorescence sur les « côtés » de la cavité Fabry-Perot. Voir par exemple : R.J. Thompson, G. Rempe, H.J. Kimble, Phys. Rev. Letters 68, 1132 (1992). Voir aussi, dans le domaine des radiofréquences : F. Bernardot, P. Nussenzveig, M. Brune, J.M. Raimond et S. Haroche, Europhysics Letters 17, 33 (1992).

¹⁰Voir par exemple le complément 2C de ce cours, ou BD, chapitre 14.

b. Cas où le champ est initialement dans un état quasi-classique avec $|\alpha| \gg 1$

Considérons maintenant le cas où l'atome initialement dans l'état $|b\rangle$ est mis en présence d'un état quasi-classique $|\alpha\rangle$ résonnant avec la transition atomique et plaçons-nous à la limite où $n = |\alpha|^2 \gg 1$. Rappelons que :

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (3A.20)$$

La distribution des coefficients c_n (distribution de Poisson) est centrée sur $\bar{n} = |\alpha|^2$, avec une largeur $\Delta n = \sqrt{\bar{n}} = |\alpha|$ (Voir Chapitre 2, § 2.3.3b). Pour trouver l'évolution du système, il nous faut décomposer l'état initial $|\psi(0)\rangle = |b\rangle \otimes |\alpha\rangle$ sur la base des états propres du système :

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \geq 1} c_{n-1} (|\psi_{+,n}\rangle + |\psi_{-,n}\rangle). \quad (3A.21)$$

On a donc, à tout instant ultérieur

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \geq 1} c_{n-1} e^{-in\omega t} \left(|\psi_{+,n}\rangle e^{-i\frac{\Omega_R \sqrt{n}}{2} t} + |\psi_{-,n}\rangle e^{i\frac{\Omega_R \sqrt{n}}{2} t} \right) \\ &= \sum_{n \geq 1} c_{n-1} e^{-in\omega t} \left(-i|a, n\rangle \sin\left(\frac{\Omega_R \sqrt{n}}{2} t\right) + |b, n-1\rangle \cos\left(\frac{\Omega_R \sqrt{n}}{2} t\right) \right). \end{aligned} \quad (3A.22)$$

Développons la racine carrée autour de \bar{n} :

$$\sqrt{n} = \sqrt{\bar{n}} + (n - \bar{n}) \frac{1}{2\sqrt{\bar{n}}}. \quad (3A.23)$$

Pour des valeurs de n distantes de \bar{n} de moins de $\sqrt{\bar{n}}$, le deuxième terme est négligeable devant le premier. On pourra donc considérer la pulsation de Rabi comme *constante pour tous les termes où c_n est non négligeable*. On peut alors écrire :

$$|\psi(t)\rangle \approx -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_n c_{n-1} e^{-in\omega t} |a, n\rangle \right) \sin \frac{\sqrt{\bar{n}} \Omega_R}{2} t + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_n c_{n-1} e^{-in\omega t} |b, n-1\rangle \right) \cos n \frac{\sqrt{\bar{n}} \Omega_R}{2} t. \quad (3A.24)$$

Nous ferons une deuxième approximation consistant à assimiler c_n à c_{n-1} dans la deuxième somme : d'après la relation de récurrence (2.53), le rapport entre ces deux nombres vaut α/\sqrt{n} et il est donc peu différent de $\alpha/\sqrt{\bar{n}} = 1$ pour tous les termes non négligeables de la somme. On obtient finalement :

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &\approx \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n c_{n-1} e^{-in\omega t} \left(-i|a, n\rangle \sin \frac{\sqrt{\bar{n}} \Omega_R}{2} t + |b, n-1\rangle \cos \frac{\sqrt{\bar{n}} \Omega_R}{2} t \right) \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-i|a\rangle \sin \frac{\sqrt{\bar{n}} \Omega_R}{2} t + |b\rangle e^{-i\omega t} \cos \frac{\sqrt{\bar{n}} \Omega_R}{2} t \right) \otimes |\alpha e^{-i\omega t}\rangle. \end{aligned} \quad (3A.25)$$

À des termes en $1/\sqrt{\bar{n}} = 1/|\alpha|$ près, l'état du système est donc le *produit tensoriel d'un état purement atomique par un état quasi-classique du champ*. Ce dernier n'est autre que celui qui résulte de l'état initial $|\alpha\rangle$ par l'évolution libre. À la différence du cas précédent, une mesure de l'état du champ (ou de l'atome) ne donne aucun renseignement sur l'état de l'atome (ou du champ). On peut également se convaincre que la valeur moyenne du dipôle atomique a maintenant une valeur non nulle dans l'état $|\psi(t)\rangle$.

Il est facile par ailleurs de voir que l'état atomique dans l'expression (3A.25) n'est autre que celui que l'on obtient en partant d'un atome dans l'état $|b\rangle$ et en le faisant interagir avec un champ électromagnétique classique résonnant avec la transition atomique. Le calcul présenté ici justifie donc l'approche « semi-classique » (ou « semi-quantique ») dans le cas où l'atome n'interagit qu'avec un seul mode du champ dans un état quasi-classique à grand nombre moyen de photons. Il montre que l'évolution semi-classique est un cas particulier de l'évolution purement quantique, dans le cas où l'état du champ est un état quasi-classique de grande valeur de $|\alpha|$. A contrario, ce calcul montre le caractère très « non-classique » de l'état nombre envisagé dans le paragraphe précédent, puisqu'il donne des prévisions physiques radicalement différentes.

c. Cas où le champ est initialement dans un état quasi-classique avec $|\alpha| \approx 1$

Dans le cas où α n'a pas un module très grand devant 1, l'expression (3A.22) est valable, mais pas sa forme simplifiée (3A.25). La probabilité $P_b(t)$ de trouver dans l'état b quel que soit l'état du champ s'écrit de manière générale :

$$P_b(t) = \sum_n |\langle n, b | \psi(t) \rangle|^2 = \sum_{n \geq 1} |c_{n-1}|^2 \cos^2 \left(\frac{\Omega_R}{2} \sqrt{nt} \right) = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n'=0}^{+\infty} \frac{|n|^{2n'}}{n'!} \cos^2 \left(\frac{\Omega_R}{2} \sqrt{n'+1}t \right). \quad (3A.26)$$

La figure 3A.4 donne l'évolution de $P_b(t)$ dans le cas où $\alpha = 4$. On y remarque trois caractéristiques de l'évolution du système qui se manifestent sur trois échelles de temps différentes :

- Il y a une oscillation de Rabi de la probabilité, à une fréquence de Rabi correspondant au nombre moyen de photons $|\alpha|^2$, comme dans le cas semi-classique.
- Cette oscillation de Rabi n'est pas d'amplitude constante, mais elle *s'amortit rapidement au cours du temps*, ce qui conduit à une égalisation momentanée des populations des niveaux a et b de l'atome ($P_b(t) \approx 1/2$). Cela est dû au fait que les différentes sinusoïdes qui figurent dans l'expression (3A.26) ont des périodes différentes. Elles démarrent toutes en phase à l'instant initial, puis se brouillent mutuellement au bout de plusieurs oscillations.
- On constate enfin que les oscillations réapparaissent sur une échelle de temps encore plus grande et on peut trouver des instants où $P_b(t)$ est à nouveau proche de 1. Cela est dû au fait que le nombre de sinusoïdes qui interviennent dans l'expression (3A.26) est *fini*. Le temps au bout duquel les différentes sinusoïdes se remettent en phase est alors lui aussi fini. Ce phénomène, qualifié de « *résurgence quantique* », a été observé dans un dispositif du type de la figure (3A.2b)¹¹.

¹¹En anglais « Quantum revival ». Pour la réalisation expérimentale voir : G. Rempe, H. Walther, Phys. Rev. Letters 58, 353 (1987).

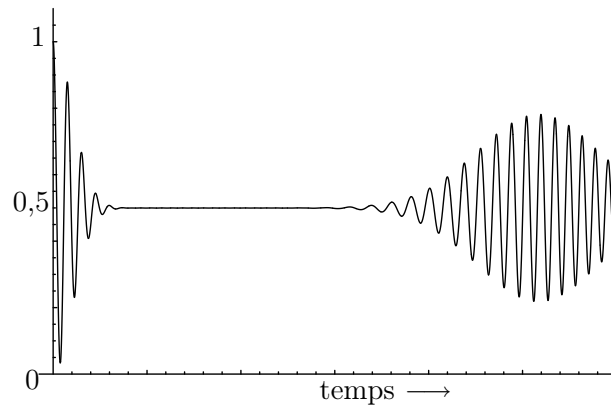


FIG. 3A.5: Probabilité de trouver l'atome dans l'état excité lorsqu'il interagit dans la cavité avec un état quasi-classique résonnant avec $\alpha = 4$.

3A.6 Cas d'une cavité imparfaite

Dans la réalité, le champ électromagnétique à l'intérieur de la cavité présente un *amortissement* : il y a possibilité de désexcitation irréversible du système à travers les inévitables pertes sur les parois de la cavité, ou dans le cas de la figure 3A.2b, grâce aux modes perpendiculaires à l'axe de la cavité. Appelons T_{cav} le temps caractéristique de cet amortissement. Deux situations se présentent alors :

- T_{cav} est beaucoup plus long que les autres temps caractéristiques du système et en particulier que la période de l'oscillation de Rabi. Tous les phénomènes que nous venons de décrire sont observables. Il y aura simplement amortissement des oscillations sur des temps longs, ou dans le cas de la spectroscopie, élargissement des résonances à une largeur $1/T_{\text{cav}}^{-1}$.
- T_{cav} est du même ordre de grandeur ou même plus petit, que les autres temps caractéristiques du système. Les modes de la cavité ont une largeur importante et on passe donc progressivement d'une situation de couplage entre niveaux discrets à une situation de couplage d'un niveau discret à un continuum (voir Complément 1B du cours « Optique Quantique 1 »). L'amortissement du système ne présente alors plus d'oscillations. Mais le temps caractéristique de cet amortissement n'est cependant pas égal à la durée de vie de l'atome dans le vide. Il subsiste un important effet de *modification de la durée de vie de l'état excité*. En effet, la cavité présente des résonances de largeur finie et modifie la *densité des états du champ accessibles pour le photon émis spontanément*. Le taux de désexcitation spontanée, calculé par la règle d'or de Fermi, est proportionnel à cette densité. On peut montrer qu'il est alors plus grand que dans le vide lorsqu'il y a résonance entre l'atome et la cavité (réduction de la durée de vie de l'atome), ou bien plus petit que dans le vide lorsqu'on est loin de résonance (augmentation de la durée de vie spontanée). Ces deux effets, moins difficiles à obtenir expérimentalement que les précédents,

ont été observés expérimentalement sur des atomes¹² et dans des dispositifs à semi-conducteurs. L'accroissement de la durée de vie du système a été en particulier utilisé pour réduire le seuil d'oscillation de lasers à semi-conducteurs.

3A.7 Conclusion

Ce complément nous a permis d'appliquer dans un cas simple le formalisme mis en place dans le chapitre 3. Il nous a montré que l'interaction entre un atome et un mode du champ aboutissait à la création d'un système global, mélangeant complètement les variables atomiques et les variables de champ, que nous avons appelé « *atome habillé* ». En fait, ce concept est plus général et a été introduit pour décrire des problèmes d'interaction matière-rayonnement dans l'espace libre, par exemple lorsque l'atome interagit avec une source de rayonnement monomode résonnant ou quasi-résonnant (dans le domaine optique ou radiofréquence), tous les autres modes du rayonnement étant vides. Dans ce cas, le diagramme de l'atome habillé (ici par les photons du mode laser), avec ses deux niveaux séparés à résonance par la fréquence de Rabi $\sqrt{n}\Omega_R$, permet de rendre compte de nombreux phénomènes :

- dédoublement des raies lorsqu'on fait la spectroscopie du système global à l'aide d'un laser sonde auxiliaire, comme dans le paragraphe 3A.4 (effet Autler-Townes).
- modification de l'émission spontanée du système, qui se traduit dans ce cas par l'apparition de 3 raies séparées de $\sqrt{n}\Omega_R/2$ dans le spectre d'émission spontanée (triplet de fluorescence de résonance).

Le lecteur désirant approfondir ces questions en trouvera un exposé détaillé dans le chapitre VI de CDG 2.

¹²P. Goy, J.M. Raimond, M. Gross, S. Haroche, Phys. Rev. Letters **50**, 1903 (1983). R.G. Hulet, E.S. Hilfer, D. Kleppner Phys. Rev. Letters **55**, 2137 (1985).

Complément 3B

Atome interagissant avec un champ dans un état quasi-classique : justification de l'approche semi-classique

Dans le cours « « Optique Quantique 1 » », le champ électromagnétique est décrit par une fonction sinusoïdale du temps alors qu'en théorie quantique, l'état du champ est décrit par un vecteur de l'espace de Hilbert. Pour justifier le point de vue semi-classique nous avons montré dans le chapitre 2 que la valeur moyenne du champ électrique dans un état quasi-classique a la même dépendance sinusoïdale que le champ classique. Cependant, ce résultat ne permet pas de définir précisément les limites de l'approche semi-classique. Nous nous proposons de montrer dans ce complément qu'il y a équivalence exacte entre le problème de l'interaction d'un atome avec le champ de rayonnement quantique dans un état quasi-classique, et celui de l'interaction d'un atome avec un champ classique et un champ quantique initialement dans l'état vide¹

3B.1 Changement de représentation en mécanique quantique

3B.1.1 Transformation de l'hamiltonien et du vecteur d'état

Nous allons montrer dans ce paragraphe qu'un problème physique décrit par l'hamiltonien \hat{H} et le vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ admet de multiples représentations équivalentes, obtenues en changeant à la fois l'hamiltonien et le vecteur d'état.

Considérons par exemple la transformation unitaire $\hat{T}(t)$ (qui vérifie donc $\hat{T}(t)\hat{T}^\dagger(t) =$

¹Voir B.R. Mollow, Phys. Rev. A 12, 1919 (1975).

$\hat{T}^+(t)\hat{T}(t) = 1$) et appelons $|\psi'(t)\rangle$ le ket obtenu en faisant agir $\hat{T}(t)$ sur $|\psi(t)\rangle$:

$$|\psi'(t)\rangle = \hat{T}(t)|\psi(t)\rangle . \quad (3B.1)$$

Notons d'abord que $|\psi'(t)\rangle$ tout comme $|\psi(t)\rangle$ est de norme 1 puisque la transformation $\hat{T}(t)$ est unitaire :

$$\begin{aligned} \langle \psi'(t) | \psi'(t) \rangle &= \langle \psi(t) | \hat{T}^+(t) \hat{T}(t) | \psi(t) \rangle \\ &= \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = 1 . \end{aligned} \quad (3B.2)$$

Cherchons quel doit être l'hamiltonien $\hat{H}(t)$ pour que le vecteur d'état $|\psi'(t)\rangle$ décrive la même situation que $|\psi(t)\rangle$, évoluant sous l'action de $\hat{H}'(t)$. Partant de l'équation (3B.1), nous obtenons

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi'(t)\rangle = i\hbar \frac{d\hat{T}(t)}{dt} |\psi(t)\rangle + \hat{T}(t) i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} . \quad (3B.3)$$

Utilisons à présent les équations de Schrödinger pour $|\psi(t)\rangle$ et $|\psi'(t)\rangle$

$$\hat{H}' |\psi'(t)\rangle = i\hbar \frac{d\hat{T}(t)}{dt} |\psi(t)\rangle + \hat{T}(t) \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle , \quad (3B.4)$$

soit en utilisant (3B.1)

$$\hat{H}' \hat{T}(t) |\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{d\hat{T}(t)}{dt} |\psi(t)\rangle + \hat{T}(t) \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle . \quad (3B.5)$$

Cette relation est satisfaite pour tout $|\psi(t)\rangle$ à condition que :

$$\hat{H}' = i\hbar \left[\frac{d\hat{T}(t)}{dt} \right] \hat{T}^+(t) + \hat{T}(t) \hat{H}(t) \hat{T}^+(t) . \quad (3B.6)$$

Dans la représentation où le vecteur d'état est donné par l'équation (3B.1), l'hamiltonien doit être égal à l'expression de l'équation (3B.6).

3B.1.2 Transformation des observables

Considérons une observable \hat{G} dans la représentation initiale. Sa valeur moyenne $\langle \hat{G} \rangle = \langle \psi(t) | \hat{G} | \psi(t) \rangle$ doit être indépendante de la représentation. Elle s'écrit dans le nouveau point de vue à l'aide de l'équation (3B.1) :

$$\langle \hat{G} \rangle = \langle \psi'(t) | \hat{T}(t) \hat{G} \hat{T}^+(t) | \psi'(t) \rangle . \quad (3B.7)$$

Il s'ensuit que dans la nouvelle représentation, la quantité physique associée à \hat{G} est décrite par l'opérateur

$$\hat{G}' = \hat{T}(t) \hat{G} \hat{T}^+(t) \quad (3B.8)$$

Dans le cas d'une particule matérielle, \hat{G} pourra être l'opérateur position $\hat{\mathbf{r}}$ ou l'opérateur vitesse $\hat{\mathbf{v}}$. Si $\hat{T}(t)$ ne commute pas avec $\hat{\mathbf{r}}$ on prendra garde que dans la nouvelle représentation l'opérateur position ne coïncide pas avec l'opérateur « multiplication par $\hat{\mathbf{r}}$ ».

Remarque

Dans le cas où la transformation unitaire s'écrit

$$\hat{T}(t) = \exp \frac{i}{\hbar} \hat{F}(t) \quad (3B.9)$$

avec $\hat{F}(t)$ commutant avec $\frac{\partial \hat{F}(t)}{\partial t}$, l'expression (3B.6) de l'hamiltonien dans le nouveau point de vue prend la forme simple :

$$\hat{H}' = \hat{T}(t) \hat{H} \hat{T}^+(t) - \frac{\partial \hat{F}(t)}{\partial t}. \quad (3B.10)$$

3B.2 Changement de représentation pour le champ électromagnétique quantique

3B.2.1 Transformation unitaire

Considérons la situation où tous les modes du champ de rayonnement sont dans l'état vide à l'exception d'un mode de vecteur d'onde \mathbf{k} et de polarisation $\boldsymbol{\varepsilon}$ qui se trouve à l'instant $t = 0$ dans l'état quasi-classique $|\alpha\rangle$. Comme nous l'avons montré dans le chapitre 2 (§ 2.3.3a), l'état du champ à l'instant t est de la forme $|\alpha e^{-i\omega t}\rangle \otimes |0\rangle$ où $\omega = ck$ et $|0\rangle$ est l'état vide pour les modes du champ différents du mode $\mathbf{k}, \boldsymbol{\varepsilon}$.

Nous allons étudier comment sont transformés les observables du champ ainsi que le vecteur d'état lorsque la transformation unitaire est de la forme

$$\hat{T}(t) = \exp[\alpha^* e^{i\omega t} \hat{a} - \alpha e^{-i\omega t} \hat{a}^+] \quad (3B.11)$$

où \hat{a} et \hat{a}^+ sont les opérateurs d'annihilation et de création dans le mode $\mathbf{k}, \boldsymbol{\varepsilon}$.

3B.2.2 Le potentiel vecteur transverse dans la nouvelle représentation

Le potentiel vecteur en jauge de Coulomb est donné par l'équation (2.28c) du chapitre 2

$$\hat{A}_\perp(\mathbf{r}) = \sum_\ell \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_\ell}{\omega_\ell} \boldsymbol{\varepsilon}_\ell (\hat{a}_\ell e^{i\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r}} + \hat{a}_\ell^+ e^{-i\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r}}). \quad (3B.12)$$

Le potentiel vecteur dans la nouvelle représentation est d'après (3B.8) égal à :

$$\hat{A}'(\mathbf{r}, t) = \hat{T}(t)\hat{A}_\perp(\mathbf{r})\hat{T}^+(t). \quad (3B.13)$$

Pour trouver $\hat{A}'(\mathbf{r}, t)$, il suffit de calculer $\hat{T}(t)\hat{a}\hat{T}^+(t)$ et $\hat{T}(t)\hat{a}^+\hat{T}^+(t)$ puisque l'opérateur $\hat{T}(t)$ n'agit de façon non triviale que sur le mode $\mathbf{k}, \boldsymbol{\varepsilon}$. Pour faire ces calculs, nous utilisons l'identité mathématique suivante

$$\exp(\hat{A} + \hat{B}) = \{\exp \hat{A}\}\{\exp \hat{B}\} \left\{ \exp \left(-\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}] \right) \right\} \quad (3B.14)$$

valable si \hat{A} et \hat{B} commutent avec $[\hat{A}, \hat{B}]$. Pour l'opérateur $\hat{T}(t)$ donné par l'opérateur 3B.11, \hat{a} et \hat{a}^+ commutent avec $[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$ et nous obtenons les deux expressions équivalentes de $\hat{T}(t)$

$$\hat{T}(t) = \{\exp(-\alpha e^{-i\omega t}\hat{a}^+)\}\{\exp(\alpha^* e^{i\omega t}\hat{a})\} \exp \frac{-|\alpha|^2}{2}, \quad (3B.15)$$

$$\hat{T}(t) = \{\exp(\alpha^* e^{i\omega t}\hat{a})\}\{\exp(-\alpha e^{-i\omega t}\hat{a}^+)\} \exp \frac{|\alpha|^2}{2}. \quad (3B.16)$$

En utilisant le fait que l'adjoint de $\hat{B}\hat{A}$ est $\hat{A}^+\hat{B}^+$, nous trouvons à partir de (3B.16)

$$\hat{T}^+(t) = \{\exp(-\alpha^* e^{i\omega t}\hat{a})\}\{\exp(\alpha e^{-i\omega t}\hat{a}^+)\} \exp \frac{|\alpha|^2}{2}. \quad (3B.17)$$

Pour calculer $\hat{T}(t)\hat{a}\hat{T}^+(t)$, nous utilisons les expressions (3B.15) et (3B.17) de $\hat{T}(t)$ et $\hat{T}^+(t)$ ainsi que la commutation de $\exp(\alpha^* e^{i\omega t}\hat{a})$ avec \hat{a} . Nous trouvons ainsi

$$\hat{T}(t)\hat{a}\hat{T}^+(t) = \{\exp(-\alpha e^{-i\omega t}\hat{a}^+)\}\hat{a}\{\exp(\alpha e^{-i\omega t}\hat{a}^+)\}. \quad (3B.18)$$

En posant $f(a^+) = \exp(\alpha e^{-i\omega t}a^+)$ et en utilisant la relation de commutation

$$[\hat{a}, f(\hat{a}^+)] = f'(\hat{a}^+) \quad (3B.19)$$

où f' est la dérivée de la fonction f , nous transformons l'équation (3B.18) en

$$\hat{T}(t)\hat{a}\hat{T}^+(t) = \hat{a} + \alpha e^{-i\omega t}. \quad (3B.20)$$

L'équation adjointe de l'équation (3B.20) est

$$\hat{T}(t)\hat{a}^+\hat{T}^+(t) = \hat{a}^+ + \alpha^* e^{i\omega t}. \quad (3B.21)$$

En utilisant les équations (3B.13), (3B.20) et (3B.21), nous trouvons que le potentiel vecteur dans la nouvelle représentation est égal à :

$$\hat{T}\hat{A}_\perp(\mathbf{r})\hat{T}^+ = \hat{A}_\perp(\mathbf{r}) + \mathbf{A}_{\text{cl}}(\mathbf{r}, t) \quad (3B.22)$$

avec

$$A_{\text{cl}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_\omega}{\omega} \boldsymbol{\varepsilon} [\alpha e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + \alpha^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}]. \quad (3B.23)$$

La grandeur $\mathbf{A}_{\text{cl}}(\mathbf{r}, t)$ apparaît comme le potentiel vecteur pour une onde plane progressive d'amplitude $2\boldsymbol{\varepsilon}_\omega|\alpha|$ pour le champ électrique, de polarisation $\boldsymbol{\varepsilon}$, et dont la phase φ coïncide avec l'argument de $\alpha = |\alpha|e^{i\varphi}$.

3B.2.3 Vecteur d'état

Dans la nouvelle représentation, le vecteur d'état, à l'instant $t = 0$, est égal, d'après (3B.1) à :

$$|\psi'(0)\rangle = \hat{T}(0)|\psi(0)\rangle = \hat{T}(0)(|\alpha\rangle \otimes |0\rangle). \quad (3B.24)$$

Puisque l'opérateur $\hat{T}(t)$ n'agit que sur le mode \mathbf{k}, ε (voir 3B.11), il ne modifie pas l'état des autres modes du rayonnement qui coïncide donc avec le vide dans les deux représentations. Qu'en est-il pour le mode \mathbf{k}, ε ? Pour répondre à cette question, remarquons d'abord que l'équation (2.54) du chapitre 2 peut s'écrire

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \exp \alpha \hat{a}^+ |0\rangle \quad (3B.25)$$

soit en inversant cette relation

$$|0\rangle = e^{|\alpha|^2/2} \exp -\alpha \hat{a}^+ |\alpha\rangle. \quad (3B.26)$$

Transformons l'équation (3B.24) en utilisant la forme (3B.6) de $\hat{T}(t)$ ainsi que l'équation (3B.26) :

$$|\psi'(0)\rangle = \exp(\alpha^* \hat{a}) |0\rangle. \quad (3B.27)$$

En développant $\exp(\alpha^* \hat{a})$ en série entière

$$\exp(\alpha^* \hat{a}) = 1 + \alpha^* \hat{a} + \frac{\alpha^{*2} \hat{a}^2}{2!} + \dots \quad (3B.28)$$

nous trouvons $\exp(\alpha^* \hat{a}) |0\rangle = |0\rangle$ d'où

$$|\psi'(0)\rangle = |0\rangle. \quad (3B.29)$$

3B.3 Hamiltonien du système couplé «champ+particules»

3B.3.1 Les observables dans la nouvelle représentation

L'hamiltonien d'un ensemble de particules de charges q_α de masse m_α , de position \mathbf{r}_α et d'impulsion $\hat{\mathbf{p}}_\alpha$ en interaction avec le champ de rayonnement quantique est donné, en jauge de Coulomb, par l'équation (3.1.2) du chapitre 3.

$$\hat{H} = \sum_\alpha \frac{1}{2m_\alpha} [\hat{\mathbf{p}}_\alpha - q_\alpha \hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}}_\alpha)]^2 + V_{\text{coul}} + \hat{H}_R. \quad (3B.30)$$

Remarquons que la transformation unitaire $\hat{T}(t)$ définie à l'équation (3B.11) ne dépend pas des grandeurs relatives aux particules et n'agit que sur le champ. Il s'ensuit que les

opérateurs relatifs aux particules ne sont pas changés par la transformation unitaire. Nous avons ainsi

$$\hat{T}(t)\hat{\mathbf{r}}_\alpha\hat{T}^+(t) = \hat{\mathbf{r}}_\alpha, \quad (3B.31a)$$

$$\hat{T}(t)\hat{\mathbf{p}}_\alpha\hat{T}^+(t) = \hat{\mathbf{p}}_\alpha. \quad (3B.31b)$$

Par ailleurs l'équation (3B.22) conduit à

$$\hat{T}(t)\hat{\mathbf{A}}_\perp(\hat{\mathbf{r}}_\alpha)\hat{T}^+(t) = \hat{\mathbf{A}}_\perp(\hat{\mathbf{r}}_\alpha) + A_{\text{cl}}(\hat{\mathbf{r}}_\alpha, t). \quad (3B.32)$$

Les équations (3B.20) et (3B.21) relatifs aux opérateurs d'annihilation et de création restent, bien entendu, inchangées.

3B.3.2 L'hamiltonien dans la nouvelle représentation

Pour trouver l'hamiltonien dans la nouvelle représentation, nous utilisons l'équation (3B.6) et calculons d'abord le premier terme $i\hbar(d\hat{T}/dt)\hat{T}^+$. En dérivant l'expression (3B.11) de $\hat{T}(t)$, il vient :

$$\frac{d\hat{T}(t)}{dt} = i\omega\alpha^* e^{i\omega t}\hat{a}\hat{T}(t) + i\omega\alpha e^{-i\omega t}\hat{T}(t)\hat{a}^+ \quad (3B.33)$$

d'où

$$i\hbar\frac{d\hat{T}(t)}{dt}\hat{T}^+(t) = -\hbar\omega[\alpha^* e^{i\omega t}\hat{a} + \alpha e^{-i\omega t}\hat{T}(t)\hat{a}^+\hat{T}^+(t)] \quad (3B.34)$$

En utilisant (3B.21), nous trouvons :

$$i\hbar\frac{d\hat{T}(t)}{dt}\hat{T}^+(t) = -\hbar\omega[\alpha^* e^{i\omega t}\hat{a} + \alpha e^{-i\omega t}\hat{a} + |\alpha|^2] \quad (3B.35)$$

Calculons à présent $\hat{T}(t)\hat{H}\hat{T}^+(t)$. En utilisant les relations (3B.31) et (3B.32), nous trouvons

$$\hat{T}(t)\left\{\sum_\alpha\frac{1}{2m_\alpha}[\hat{\mathbf{p}}_\alpha - q_\alpha\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}}_\alpha)]^2\right\}\hat{T}^+(t) = \sum_\alpha\frac{1}{2m_\alpha}[\hat{\mathbf{p}}_\alpha - q_\alpha\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}}_\alpha) - q_\alpha\mathbf{A}_{\text{cl}}(\hat{\mathbf{r}}_\alpha, t)]^2 \quad (3B.36)$$

$$\hat{T}(t)V_{\text{coul}}\hat{T}^+(t) = V_{\text{coul}} \quad (3B.37)$$

Considérons à présent $\hat{T}(t)\hat{H}_R\hat{T}^+(t)$. L'hamiltonien du champ est égal à (voir Éq. 2.8)

$$\hat{H}_R = \sum_\ell\hbar\omega_\ell(\hat{a}_\ell^+\hat{a}_\ell + \frac{1}{2}). \quad (3B.38)$$

L'opérateur $\hat{T}(t)$ ne diffère de l'identité que pour le mode $\mathbf{k}, \boldsymbol{\varepsilon}$, et il suffit de calculer

$$\hat{T}(t)\hat{a}^+\hat{a}T^+(t) = \hat{T}(t)\hat{a}^+\hat{T}^+(t)\hat{T}^+(t) \quad (3B.39)$$

puisque $\hat{T}^+\hat{T} = 1$. En utilisant les équations (3B.20) et (3B.21), nous trouvons :

$$\hat{T}(t)\hat{a}^+\hat{a}T^+(t) = \hat{a}^+\hat{a} + \alpha^*e^{i\omega t}\hat{a} + \alpha e^{-i\omega t}\hat{a}^+ + |\alpha|^2. \quad (3B.40)$$

Il s'ensuit que

$$\hat{T}(t)\hat{H}_R\hat{T}^+(t) = \hat{H}_R + \hbar\omega(\alpha^*e^{i\omega t}\hat{a} + \alpha e^{-i\omega t}\hat{a}^+ + |\alpha|^2). \quad (3B.41)$$

En définitive en utilisant les équations (3B.35), (3B.36), (3B.37) et (3B.41), nous obtenons :

$$\hat{H}' = \sum_{\alpha} \frac{1}{2m_{\alpha}} [\hat{p}_{\alpha} - q_{\alpha}\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_{\alpha}) - q_{\alpha}\mathbf{A}_{\text{cl}}(r_{\alpha}, t)]^2 + V_{\text{coul}} + H_R. \quad (3B.42)$$

3B.3.3 Comparaison avec l'approche semi-classique

Si l'état initial du système dans la représentation initiale est un produit tensoriel d'un état $|i\rangle$ pour les particules par l'état $(|\alpha, 0\rangle)$ pour le rayonnement, nous obtenons comme état initial dans la nouvelle représentation

$$|\psi'(0)\rangle = |i\rangle \otimes |0\rangle \quad (3B.43)$$

puisque $\hat{T}(t)$ n'agit que sur les variables du rayonnement et que le nouvel état initial du rayonnement est le vide pour tous les modes (voir l'équation (3B.29)). Dans la nouvelle représentation, les particules initialement dans l'état $|i\rangle$ interagissent avec un champ classique défini par son potentiel vecteur (3B.23) et avec un champ quantique dont l'état initial est le vide.

Dans l'approche semi-classique, l'hamiltonien \hat{H}_{sc} n'agirait que sur les particules et serait égal à

$$\hat{H}_{\text{sc}} = \sum_{\alpha} \frac{1}{2m_{\alpha}} [\hat{p}_{\alpha} - q_{\alpha}\hat{\mathbf{A}}_{\text{cl}}(\mathbf{r}_{\alpha}, t)]^2 + V_{\text{coul}}, \quad (3B.44)$$

l'état initial des particules étant $|i\rangle$.

La différence entre les deux approches est donc associée au couplage de l'atome avec le vide de rayonnement. Si l'on n'est pas intéressé par l'évolution de l'état quantique du champ, l'effet du couplage avec le vide sur l'évolution de l'atome (retour dans l'état fondamental par émission spontanée par exemple) peut être décrit en utilisant la matrice densité atomique. L'évolution hamiltonienne est alors décrite par \hat{H}_{sc} , et le couplage avec le vide de rayonnement se manifeste sous la forme de termes de relaxation pour la matrice densité atomique. Nous utiliserons cette méthode² dans le chapitre 4. Par contre, si on

²Pour l'étude des fondements de cette méthode, voir par exemple CDG 2, chapitres IV et V.

s'intéresse à l'évolution de l'état quantique du champ (états comprimés, états à un seul photon), la méthode semi-classique est inutilisable. On doit également prendre garde au fait que l'état quantique du champ évoluant sous l'action de l'hamiltonien \hat{H}' (Éq. 3B.43) n'est le vide qu'à l'instant initial. L'évolution du système couplé atome-champs va faire apparaître des photons dans les modes initialement vides, et l'étude de leurs propriétés requiert un formalisme explicitement quantique.

Complément 3C

Approximation dipolaire électrique

Dans le cours « Optique Quantique 1 », on a montré que l'interaction entre un atome et un champ électromagnétique classique pouvait être décrite à l'aide d'hamiltoniens de couplage différents selon la jauge choisie pour fixer les potentiels électromagnétiques. En particulier, l'accent avait été mis sur les deux hamiltoniens d'interaction les plus couramment utilisés, l'hamiltonien « $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}$ » en jauge de Coulomb et l'hamiltonien dipolaire électrique « $\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$ » en jauge de Göppert-Mayer. En théorie quantique du champ, nous avons jusqu'à maintenant privilégié la jauge de Coulomb. Nous montrons dans ce complément qu'il est également possible d'utiliser l'hamiltonien dipolaire électrique en théorie quantique. Cependant l'introduction de cet hamiltonien est plus complexe qu'en théorie classique et fait apparaître un terme supplémentaire dans l'hamiltonien des particules.

3C.1 Transformation unitaire dans le formalisme semi-classique

3C.1.1 Rappels

L'hamiltonien d'un atome en interaction avec un champ électromagnétique classique décrit par les potentiels vecteurs \mathbf{A} et U est de la forme :

$$\hat{H}_{\text{sc}} = \frac{1}{2m}[\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}, t)]^2 + qU(\hat{\mathbf{r}}, t). \quad (3C.1)$$

Comme dans le cours « Optique Quantique 1 » (chapitre 2), nous traitons ici le cas d'un électron soumis à l'onde électromagnétique incidente et au champ coulombien du noyau. Nous faisons également l'approximation des grandes longueurs d'onde qui se traduit par le fait que les potentiels électromagnétiques pour l'onde incidente ont pratiquement mêmes valeurs en \mathbf{r} (position de l'électron) et en \mathbf{r}_0 (position du noyau). Pour simplifier les développements, nous supposons dans la suite le noyau situé à l'origine des coordonnées

($\mathbf{r}_0 = 0$). En jauge de Coulomb, l'hamiltonien atomique prend alors la forme :

$$\hat{H}_{\text{sc}} = \sum_{\alpha} \frac{1}{2m} [\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\mathbf{0}, t)]^2 + V_{\text{coul}}(\hat{\mathbf{r}}) . \quad (3C.2)$$

Pour obtenir l'hamiltonien d'interaction dipolaire électrique, il est possible de suivre la démarche du cours « Optique Quantique 1 » et d'effectuer une transformation de jauge sur les potentiels. Nous suivons ici une démarche différente, voisine de celle exposée dans le complément 3B, utilisant un changement de représentation par transformation unitaire¹ de l'hamiltonien H_{sc} .

3C.1.2 Changement de représentation

Nous nous proposons d'étudier comment est transformé l'hamiltonien H_{sc} quand on applique au vecteur d'état la transformation unitaire

$$\hat{T}(t) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{0}, t) \right] \quad (3C.3)$$

(avec $\hat{\mathbf{D}} = q\hat{\mathbf{r}}$) (voir complément 3B). Remarquons d'abord que $\hat{T}(t)$ commute avec $\hat{\mathbf{r}}$ et qu'il se présente comme un opérateur de translation pour l'impulsion² :

$$\hat{T}(t) \hat{\mathbf{p}} \hat{T}^+(t) = \hat{\mathbf{p}} + q\mathbf{A}(\mathbf{0}, t) . \quad (3C.4)$$

L'hamiltonien dans la nouvelle représentation est donné par l'équation (3B.6) du complément 3B. En utilisant les équations (3C.2) et (3C.4), nous trouvons d'abord que

$$\hat{T}(t) \hat{H}_{\text{sc}} \hat{T}^+(t) = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V_{\text{coul}}(\hat{\mathbf{r}}) . \quad (3C.5)$$

Calculons à présent $i\hbar[d\hat{T}/dt]\hat{T}^+$. D'après (3B.3), nous trouvons

$$\frac{d\hat{T}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \left[\hat{\mathbf{D}} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{0}, t)}{\partial t} \right] \hat{T}(t) . \quad (3C.6)$$

En utilisant $\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A} / \partial t$, nous obtenons

$$i\hbar \frac{d\hat{T}(t)}{dt} \hat{T}^+(t) = -\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{0}, t) . \quad (3C.7)$$

En rassemblant (3C.5) et (3C.7), nous trouvons l'hamiltonien \hat{H}'_{sc} dans la nouvelle représentation :

$$\hat{H}'_{\text{sc}} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V_{\text{coul}}(\mathbf{r}) - \hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{0}, t) , \quad (3C.8)$$

¹Le lien existant entre la transformation unitaire et la transformation de jauge est étudié dans CDG 1, chapitre IV § A.

²La relation (3C.4) résulte du commutateur $[f(\hat{x}), \hat{p}_z] = i\hbar f'(\hat{x})$.

l'hamiltonien \hat{H}'_{sc} se présente donc comme la somme de l'hamiltonien atomique et de l'hamiltonien d'interaction dipolaire électrique. Nous retrouvons donc par une méthode différente l'hamiltonien dipolaire électrique du cours « Optique Quantique 1 ».

Remarque

Les observables ne sont pas représentées par les mêmes opérateurs dans les deux points de vue. Ainsi la vitesse $\hat{\mathbf{v}}$ est-elle donnée par l'opérateur $[\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\mathbf{0}, t)]/m$ en jauge de Coulomb et par l'opérateur $\hat{T}(t) \hat{\mathbf{v}} \hat{T}^\dagger(t) = \hat{\mathbf{p}}/m$ (d'après l'équation 3C.4) dans le point de vue dipolaire électrique. La signification physique de l'opérateur impulsion $\hat{\mathbf{p}}$ apparaît ainsi plus transparente dans la nouvelle représentation puisque $\hat{\mathbf{p}}$ coïncide alors avec la vitesse (au facteur m près). Rappelons que ce résultat avait déjà été obtenu par une approche différente dans le cours « Optique Quantique 1 ».

3C.2 Atome en interaction avec le rayonnement quantique

3C.2.1 Transformation unitaire

Comme dans le §3.1.2 du chapitre 3, nous utilisons comme point de départ l'hamiltonien du système global « atome + champ » à l'approximation des grandes longueurs d'onde. L'atome étant supposé localisé à l'origine, cet hamiltonien s'écrit :

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}[\hat{\mathbf{p}} - q\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{0})]^2 + V_{\text{coul}}(\hat{\mathbf{r}}) + \hat{H}_{\text{R}} \quad (3C.9)$$

où $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{0})$ est l'opérateur potentiel vecteur pris au point $\mathbf{r}_0 = 0$, et \hat{H}_{R} est l'hamiltonien du rayonnement.

Nous nous proposons d'étudier comment est transformé \hat{H} dans la transformation unitaire

$$\hat{T} = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{0}) \right] \quad (3C.10)$$

qui généralise au champ quantique la transformation (3C.3) utilisée dans le cas d'un champ classique. Il y a cependant deux différences essentielles entre ces transformations : d'abord $\mathbf{A}(\mathbf{0}, t)$ est un nombre alors que $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{0})$ est un opérateur, ensuite la transformation (3C.3) dépend explicitement du temps, à cause du potentiel vecteur classique, ce qui n'est pas le cas pour la transformation (3C.10).

Étudions comment sont transformés quelques opérateurs importants dans le changement de représentation. Notons d'abord que $\hat{\mathbf{r}}$ commutant avec $\hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{0})$, nous avons

$$\hat{T} \hat{\mathbf{r}} \hat{T}^\dagger = \hat{\mathbf{r}}. \quad (3C.11)$$

En ce qui concerne l'impulsion $\hat{\mathbf{p}}$ de l'électron, le calcul de l'opérateur transformé se fait comme dans le cas semi-classique puisque $\hat{\mathbf{p}}$ et $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{0})$ d'une part, $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{0})$ et \hat{T} d'autre part,

commutent entre eux. Nous obtenons donc

$$\hat{\mathbf{p}}' = \hat{T} \hat{\mathbf{p}} \hat{T}^+ = \hat{\mathbf{p}} + q\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{0}) . \quad (3C.12)$$

Pour connaître les lois de transformation des opérateurs relatifs au rayonnement, il suffit de calculer $\hat{T} \hat{a}_\ell \hat{T}^+$ puisque les opérateurs fondamentaux (champ électrique, potentiel vecteur etc...) sont des combinaisons linéaires des opérateurs \hat{a}_ℓ et \hat{a}_ℓ^+ . En utilisant le développement 3.10 de l'opérateur $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{0})$, remarquons d'abord que \hat{T} peut s'écrire

$$\hat{T} = \prod_{\ell} \hat{T}_{\ell} \quad (3C.13a)$$

avec

$$\hat{T}_{\ell} = \exp -\frac{i}{\hbar} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{\ell}}{\omega_{\ell}} \hat{\mathbf{D}} \cdot \vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\ell} (\hat{a}_{\ell} + \hat{a}_{\ell}^+) . \quad (3C.13b)$$

Puisque \hat{a}_{ℓ} commute avec \hat{T}_j lorsque $\ell \neq j$, nous avons

$$\hat{T}_{\ell} \hat{a}_{\ell} \hat{T}^+ = \hat{T}_{\ell} \hat{a}_{\ell} \hat{T}_{\ell}^+ . \quad (3C.14)$$

Le calcul de $\hat{T}_{\ell} \hat{a}_{\ell} \hat{T}_{\ell}^+$ est en tout point identique à celui fait au complément 3B et conduit à la relation suivante

$$\hat{T}_{\ell} \hat{a}_{\ell} \hat{T}_{\ell}^+ = \hat{a}_{\ell} + \frac{i}{\hbar} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{\ell}}{\omega_{\ell}} \hat{\mathbf{D}} \cdot \vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\ell} . \quad (3C.15a)$$

L'adjoint de l'équation (3C.15a) donne

$$\hat{T}_{\ell} \hat{a}_{\ell}^+ \hat{T}_{\ell}^+ = \hat{a}_{\ell}^+ + \frac{i}{\hbar} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{\ell}}{\omega_{\ell}} \hat{\mathbf{D}} \cdot \vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\ell} . \quad (3C.15b)$$

En combinant les équations (3C.15a) et (3C.15b), on peut, par exemple, trouver comment sont transformés \hat{A}_{\perp} , \hat{E}_{\perp} , \hat{B} , \hat{H}_R . Remarquons toutefois que l'expression (3C.10) de \hat{T} implique que :

$$\hat{T} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{0}) \hat{T}^+ = \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{0}) . \quad (3C.16)$$

3C.2.2 L'hamiltonien dans la nouvelle représentation

L'opérateur \hat{T} étant indépendant du temps, l'hamiltonien transformé \hat{H}' est simplement égal à $\hat{T} \hat{H} \hat{T}^+$. Calculons les divers termes de $\hat{T} \hat{H} \hat{T}^+$. En utilisant les équations (3C.12) et (3C.16), nous trouvons

$$\hat{T} (\hat{\mathbf{p}} - q\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{0})) \hat{T}^+ = \hat{\mathbf{p}} , \quad (3C.17)$$

d'où

$$\hat{T} \frac{1}{2m} [\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\mathbf{0})]^2 \hat{T}^+ = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} . \quad (3C.18)$$

De la relation (3C.11), nous déduisons

$$\hat{T}V_{\text{coul}}(\hat{\mathbf{r}})\hat{T}^+ = V_{\text{coul}}(\hat{\mathbf{r}}). \quad (3C.19)$$

Calculons enfin comment est transformé l'hamiltonien du champ de rayonnement \hat{H}_R :

$$\begin{aligned} \hat{T}\hat{H}_R\hat{T}^+ &= \sum_{\ell} \hbar\omega_{\ell} \hat{T} \left(\hat{a}_{\ell}^+ \hat{a}_{\ell} + \frac{1}{2} \right) \hat{T}^+ \\ &= \sum_{\ell} \hbar\omega_{\ell} \left(\hat{T} \hat{a}_{\ell}^+ \hat{T}^+ \hat{T} \hat{a}_{\ell} \hat{T}^+ + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (3C.20)$$

En utilisant les équations (3C.15a) et (3C.15b) nous obtenons

$$\hat{T}\hat{H}_R\hat{T}^+ = \hat{H}_R + \left[\sum_{\ell} i\mathcal{E}\varepsilon_{\ell}(\hat{a}_{\ell}^+ - \hat{a}_{\ell}) \right] \cdot \hat{\mathbf{D}} + \sum_{\ell} \frac{\mathcal{E}_{\ell}^2}{\hbar\omega_{\ell}} (\hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\ell})^2. \quad (3C.21)$$

Nous reconnaissons dans le second terme du membre de droite de l'équation (3C.21) l'expression du champ électrique transverse, ce qui permet d'écrire (3C.21) sous la forme :

$$\hat{T}\hat{H}_R\hat{T}^+ = \hat{H}_R - \hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_{\perp}(\mathbf{0}) + \hat{E}_{\text{dip}} \quad (3C.22)$$

où \hat{E}_{dip} est un opérateur qui agit uniquement sur les variables atomiques

$$\hat{E}_{\text{dip}} = \sum_{\ell} \frac{\mathcal{E}_{\ell}^2}{\hbar\omega_{\ell}} (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\ell} \cdot \hat{\mathbf{D}})^2 = \frac{1}{2\varepsilon_0 L^3} \sum_{\ell} (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\ell} \cdot \hat{\mathbf{D}})^2. \quad (3C.23)$$

En regroupant les équations (3C.18), (3C.19) et (3C.22), nous obtenons finalement

$$\hat{H}' = \hat{H}'_{\text{P}} + \hat{H}_R + \hat{H}'_1 \quad (3C.24)$$

avec

$$\hat{H}'_{\text{P}} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + U_{\text{coul}}(\mathbf{r}) + \hat{E}_{\text{dip}} \quad (3C.25a)$$

et

$$\hat{H}'_1 = -\hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_{\perp}(\mathbf{0}). \quad (3C.25b)$$

Dans la nouvelle représentation, l'hamiltonien d'interaction se présente donc sous la forme de l'hamiltonien dipolaire électrique. En électrodynamique quantique comme en électrodynamique classique, on peut donc traiter l'interaction d'un atome avec le rayonnement aussi bien avec l'hamiltonien « $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}$ » qu'avec l'hamiltonien « $\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$ ». Il existe cependant des différences significatives. Par exemple, en électrodynamique quantique, l'hamiltonien des particules n'est pas le même dans les deux représentations puisque dans la représentation dipolaire électrique, on doit rajouter le terme d'énergie dipolaire \hat{E}_{dip} . Heureusement, ce terme n'est guère important pour de nombreux problèmes et il est fréquemment ignoré³. Il faut aussi avoir à l'esprit que si l'opérateur $\hat{\mathbf{E}}_{\perp}(\mathbf{r})$ a bien l'expression mathématique de l'opérateur champ électrique transverse en jauge de Coulomb, sa signification physique est différente. En effet, il est facile de voir à partir des équations (3C.15a) et (3C.15b) que le champ électrique transverse dans la nouvelle représentation, égal à $\hat{T} \hat{\mathbf{E}}_{\perp}(\mathbf{r}) \hat{T}^+$, ne coïncide pas avec $\hat{\mathbf{E}}_{\perp}(\mathbf{r})$. On montre⁴ que l'opérateur $\hat{\mathbf{E}}_{\perp}(\mathbf{r})$ dans la nouvelle représenta-

³Il joue cependant un rôle important dans le calcul des corrections radiatives (voir CDG 2, Ex. 7) et dans celui de l'interaction entre deux atomes (CDG 1 Comp. A IV)

⁴Voir CDG 1, Chapitre IV

tion est associé à la quantité physique « induction électrique ». C'est l'une des subtilités et des difficultés de la théorie quantique de comprendre la correspondance entre opérateur mathématique et grandeur physique : selon la représentation choisie, le même opérateur mathématique pourra ainsi correspondre à des grandeurs physiques différentes.

Remarque

L'expression de l'énergie dipolaire (3C.23) conduit en apparence à une somme divergente. Il faut cependant prendre garde que l'approximation des grandes longueurs d'onde utilisée pour trouver \hat{H}' ne peut pas être appliquée aux modes de fréquence élevées apparaissant dans la formule (3C.23). En pratique, pour rester dans les limites de cette approximation, il faut borner la sommation à des vecteurs d'onde de module inférieur à une valeur k_M telle que $\hbar ck_M \gg$ (énergie d'ionisation) et $k_M \ll a_0^{-1}$ (a_0 rayon de Bohr).

Complément 3D

Photons jumeaux intriqués en polarisation émis dans une cascade radiative atomique

3D.1 Introduction. Paires de photons intriqués pour une expérience réelle

Au complément 2C, nous avons présenté l'argument d'Einstein-Podolsky et Rosen, et le théorème de Bell, sur des photons intriqués en polarisation décrits par l'état (2C.15)

$$|\Psi_{\text{EPR}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x, x\rangle + |y, y\rangle). \quad (3D.1)$$

Pour passer de l'expérience de pensée à l'expérience réelle, il faut être capable de produire une paire de photons ayant les propriétés suivantes :

- Leurs fréquences doivent être dans le visible (ou le proche infrarouge ou ultra violet), seul domaine où on dispose de polariseurs effectuant une véritable mesure de polarisation, au sens défini au paragraphe (2C.2.1). Cette condition exclut les photons de plus grande énergie (X , ou γ).
- Le processus d'émission doit pouvoir se faire par deux chemins distincts partant d'un même état initial et aboutissant à un même état final, de façon à faire apparaître la superposition de deux termes.

Comme l'ont montré Clauser, Horne, Shimony et Holt¹, les paires de photons émis dans certaines cascades radiatives atomiques répondent à ces exigences. On appelle cascade radiative un processus par lequel un atome émet successivement plusieurs photons, en général de fréquences différentes, en se désexcitant par étapes successives depuis un état excité vers des états d'énergie inférieures. Un atome partant d'un niveau e , passant par

¹J. Clauser, M. Horne, A. Shimony, R. Holt, « *Proposed experiments to test local hidden-variable theories* », Physical Review Letters **23**, 880 (1969).

un niveau intermédiaire r , et arrivant finalement sur un niveau fondamental g , émet une paire de photons d'énergies.

$$\hbar\omega_1 = E_e - E_r \quad (3D.2)$$

et

$$\hbar\omega_2 = E_r - E_g. \quad (3D.3)$$

Nous allons voir que si le niveau r est dégénéré, on peut effectivement obtenir une paire de photons intriqués.

Pour rendre les choses concrètes, on peut citer une cascade radiative dans le calcium (Figure 3D.1) qui émet un photon dans le violet (423 nm) et un photon dans le vert (513 nm). Les paires de photons émis par cette cascade ont permis des tests très convaincants des inégalités de Bell.

Nous montrons dans ce complément, en utilisant le formalisme mis en place dans le chapitre, que ce processus de désexcitation spontanée en cascade produit effectivement une paire de photons dont les polarisations sont décrites par l'état (3D.1), si les niveaux atomiques ont respectivement pour moments cinétiques $J = 0$, $J = 1$ et $J = 0$, et si on filtre les photons en direction.

3D.2 Paire de photons émis dans une cascade radiative atomique $J = 0 \rightarrow J = 1 \rightarrow J = 0$: processus élémentaire

3D.2.1 Système considéré

Considérons trois niveaux atomiques g , r et e , de moments cinétiques totaux respectifs $J = 0$, $J = 1$ et $J = 0$ (figure 3D.1). Le niveau e n'est pas dégénéré, et la fonction d'onde associée à l'état $|e\rangle$ est paire. Il en est de même du niveau $|g\rangle$. En revanche, le niveau intermédiaire r est dégénéré, puisque le nombre quantique m associé à la projection \hat{J}_z du moment cinétique suivant l'axe \mathbf{Oz} peut prendre les valeurs $m_r = -1, 0$ ou $+1$. Les trois états correspondants ont des fonctions d'onde impaires. Il en résulte que les éléments de matrice de l'opérateur dipôle électrique entre e et g sont nuls, tandis qu'ils sont a priori différents de zéro entre e et r , ou r et g .

Lorsqu'il est porté dans le niveau supérieur e , l'atome peut donc se désexciter spontanément, par transition dipolaire électrique, vers n'importe quel état intermédiaire $|m_r\rangle$, en émettant un photon ν_1 . De là, il peut à nouveau se désexciter spontanément, par transition dipolaire électrique, vers l'état fondamental $|g\rangle$, en émettant un photon ν_2 . En revanche, il ne peut passer directement de e à g en émettant un seul photon. Nous allons nous

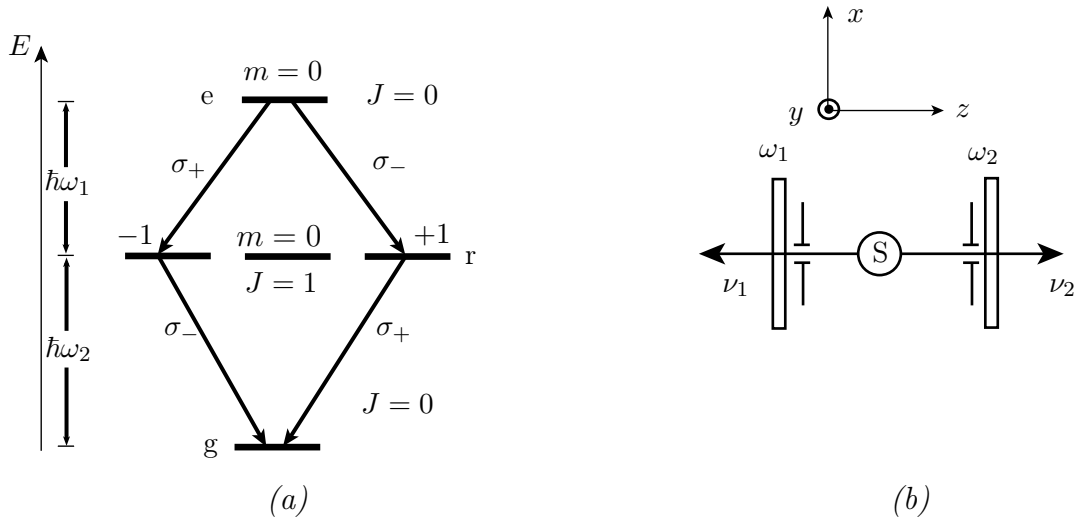


FIG. 3D.1: Source de paires de photons intriqués émis dans une cascade radiative atomique $J = 0 \rightarrow J = 1 \rightarrow J = 0$. Dans la source S , un atome porté dans le niveau e va se désexciter spontanément en émettant un photon ν_1 , de fréquence ω_1 , et un photon ν_2 , de fréquence ω_2 . À l'aide de diaphragmes et de filtres interférentiels, on isole les photons ν_1 se propageant suivant \mathbf{Oz} vers les z négatifs, et les photons ν_2 se propageant suivant \mathbf{Oz} vers les z positifs, (les deux photons n'ont pas la même fréquence et peuvent être distingués par les filtres).

intéresser à l'état décrivant une paire de photons (ν_1, ν_2) émis suivant des directions particulières. Comme le montre la figure, on sélectionne un photon ν_1 se propageant suivant \mathbf{Oz} vers les z négatifs, et un photon ν_2 se propageant suivant \mathbf{Oz} vers les z positifs.

3D.2.2 Émission du photon ν_1 : état intriqué atome-rayonnement

Pour déterminer l'état du champ obtenu à l'issue du passage de l'état $|e\rangle$ à l'état $|g\rangle$, après filtrage en direction et en fréquence, nous devons préciser les éléments de matrice du hamiltonien d'interaction. Notons d'abord que puisque l'atome change de niveau, \hat{H}_{12} ne contribue pas (§ 3.2.5). Quant à \hat{H}_{11} , il peut coupler deux niveaux atomiques, même en l'absence de photon initial, en provoquant l'émission d'un photon spontané (§ 3.2.3). Plus précisément, partant de l'état initial à 0 photon

$$|i\rangle = |e; 0\rangle \quad (3D.4)$$

l'hamiltonien \hat{H}_{11} peut a priori provoquer une transition vers n'importe quel état

$$|j\rangle = |m_r; n_\ell = 1\rangle \quad (3D.5)$$

où $|m_r\rangle$ désigne l'atome dans l'état $|r, m_r\rangle$, et où ℓ est un mode du champ.

L'élément de matrice correspondant vaut (cf. équation 3.21a)

$$\langle m_r; n_\ell = 1 | \hat{H}_{I1} | e; 0 \rangle = -\frac{q}{m} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_\ell L^3}} \langle m_r | \hat{\mathbf{p}} \cdot \vec{\epsilon}_\ell | e \rangle. \quad (3D.6)$$

Dans ce calcul, nous ne nous intéressons qu'à l'état du champ après filtrage, et nous nous limitons donc aux modes ℓ se propageant suivant $-\mathbf{Oz}$. Pour une fréquence ω' déterminée, on a alors deux modes possibles correspondant à deux polarisations orthogonales. Nous choisirons les polarisations circulaires σ_+ et σ_- autour de \mathbf{Oz} , que nous écrirons (cf. complément 2A du cours d'« Optique Quantique 1 »)

$$\vec{\epsilon}_+ = -\frac{\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}}, \quad (3D.7)$$

$$\vec{\epsilon}_- = \frac{\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}}. \quad (3D.8)$$

Les règles de sélection vues dans ce complément montrent alors que les seuls éléments de matrice non nuls sont

$$\langle m_r = -1; n_{\sigma_+} = 1 | \hat{H}_{I1} | e; 0 \rangle = -\frac{q}{m} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega' L^3}} \langle m_r = -1 | \hat{\mathbf{p}} \cdot \vec{\epsilon}_+ | e \rangle \quad (3D.9)$$

et

$$\langle m_r = 1; n_{\sigma_-} = 1 | \mathbf{H}_{I1} | e; 0 \rangle = -\frac{q}{m} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega' L^3}} \langle m_r = 1 | \hat{\mathbf{p}} \cdot \vec{\epsilon}_- | e \rangle. \quad (3D.10)$$

Il est facile de montrer que pour les deux modes considérés (polarisation $\vec{\epsilon}_+$ et $\vec{\epsilon}_-$, même direction de propagation $-\mathbf{Oz}$), les deux éléments de matrice sont égaux. La projection sur l'espace associé à ces deux modes, de l'état obtenu après désexcitation, est donc de la forme (après normalisation)

$$|\Psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|m_r = -1; n_{\ell, \sigma_+} = 1\rangle + |m_r = +1; n_{\ell, \sigma_-} = 1\rangle \right). \quad (3D.11)$$

Il s'agit d'un état intriqué (non factorisable) de l'atome et du rayonnement, superposition de deux états distincts du système :

- l'atome est dans $|r, m_r = -1\rangle$ et un photon polarisé σ_+ de fréquence ω' se propage vers $-\mathbf{Oz}$;
- l'atome est dans l'état $|r, m_r = +1\rangle$ et un photon polarisé σ_- de fréquence ω' se propage vers $-\mathbf{Oz}$.

Remarque

En fait le processus associé à la première désexcitation (en ignorant la deuxième) est une émission spontanée, qui se traite par le formalisme du quasi-continuum couplé à un état discret (partie 3.3 du chapitre 3). L'état obtenu comporte donc une infinité de termes de la forme $\gamma_j |j\rangle$, avec $|j\rangle = |m_r, n_\ell = 1\rangle$ (3D.5), et γ_j peut s'obtenir par un traitement à la Weiskopf-Wigner (paragraphe 1.3.2.d du cours PHY551). Comme ici nous effectuons un filtrage ne conservant que deux modes ℓ , nous ne conservons que les deux termes associés à ces deux modes, et nous normalisons le vecteur d'état obtenu puisque nous nous intéressons aux probabilités relatives aux photons qui ont passé le filtrage en direction et en fréquence.

3D.2.3 Émission du photon ν_2 : paire EPR élémentaire

Le niveau r n'est pas stable, et il peut se désexciter vers l'état fondamental $|g\rangle$. Plus précisément, sous l'effet de \hat{H}_{I1} , un état $|r, m_r; 0\rangle$ est couplé à $|g; n_k = 1\rangle$, k désignant un mode du rayonnement de fréquence ω_k et de polarisation $\vec{\epsilon}_k$. L'élément de matrice de couplage vaut

$$\langle g; n_k = 1 | \hat{H}_{I1} | r, m_r; 0 \rangle = -\frac{q}{m} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_k L^3}} \langle g | \hat{\mathbf{p}} \cdot \vec{\epsilon}_k | r \rangle. \quad (3D.12)$$

Ici encore, la prise en compte du filtrage en direction (suivant $+\mathbf{Oz}$) et en fréquence (à ω'') restreint considérablement le nombre des états finaux pour lesquels le couplage est non nul. Du fait des règles de sélection, pour des photons se propageant suivant $+\mathbf{Oz}$, les seuls éléments de matrice non-nuls sont

$$\langle g; n_{\sigma_-} = 1 | \hat{H}_{I1} | m_r = -1; 0 \rangle = -\frac{q}{m} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega'' L^3}} \langle g | \hat{\mathbf{p}} \cdot \vec{\epsilon}_- | m_r = -1 \rangle \quad (3D.13)$$

et

$$\langle g; n_{\sigma_+} = 1 | \hat{H}_{I1} | m_r = 1; 0 \rangle = -\frac{q}{m} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega'' L^3}} \langle g | \hat{\mathbf{p}} \cdot \vec{\epsilon}_+ | m_r = 1 \rangle. \quad (3D.14)$$

Ces éléments de matrice sont égaux.

Sous l'effet de \hat{H}_{I1} , l'état intermédiaire (3D.11) évolue donc aux temps longs vers

$$|\Psi_I\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|g; n_{\ell, \sigma_+} = 1, n_{k, \sigma_-} = 1\rangle + |g; n_{\ell, \sigma_-} = 1, n_{k, \sigma_+} = 1\rangle \right), \quad (3D.15)$$

où k désigne un mode se propageant vers $+\mathbf{Oz}$.

On peut ici mettre en facteur la partie atomique $|g\rangle$, et il reste pour le rayonnement

$$|\Psi_R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|n_{\ell, \sigma_+} = 1, n_{k, \sigma_-} = 1\rangle + |n_{\ell, \sigma_-} = 1, n_{k, \sigma_+} = 1\rangle \right). \quad (3D.16)$$

On a maintenant affaire à un état intriqué du rayonnement seul, superposition de deux états distincts des paires (ν_1, ν_2) :

- un photon ℓ se propageant vers $-\mathbf{Oz}$ et polarisé σ_+ , et un photon k se propageant vers $+\mathbf{Oz}$ et polarisé σ_- ;
- un photon ℓ se propageant vers $-\mathbf{Oz}$ et polarisé σ_- , et un photon k se propageant vers $+\mathbf{Oz}$ et polarisé σ_+ .

À ce stade, comme nous l'avons fait dans le complément 2C, nous pouvons simplifier les notations en sous-entendant que nous avons uniquement des états à 1 photon. En notant $|\varepsilon_+\rangle$ et $|\varepsilon_-\rangle$ des états à 1 photon respectivement polarisés circulairement σ_+ et σ_- relativement à l'axe \mathbf{Oz} , on peut écrire l'état du rayonnement (3D.16) sous la forme

$$|\Psi_R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\varepsilon_+, \varepsilon_-\rangle + |\varepsilon_-, \varepsilon_+\rangle \right). \quad (3D.17)$$

Dans chaque produit tensoriel tel que $|\varepsilon_+, \varepsilon_-\rangle$ ou $|\varepsilon_-, \varepsilon_+\rangle$, il est sous-entendu que le premier terme est relatif à 1 photon se propageant vers les z négatifs, et le deuxième est relatif à 1 photon se propageant vers les z positifs.

On peut changer de base de polarisation et introduire des polarisations linéaires orthogonales, par exemple suivant \mathbf{Ox} et \mathbf{Oy} . Alors, en désignant par $|x\rangle$ et $|y\rangle$ des états à 1 photon respectivement polarisés suivant $|x\rangle$ et $|y\rangle$, on peut écrire comme en (2C.8) et (2C.9)

$$|\varepsilon_+\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + i|y\rangle), \quad (3D.18)$$

$$|\varepsilon_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle - i|y\rangle). \quad (3D.19)$$

En reportant dans (3D.17), on obtient l'état de la paire de photons

$$|\Psi_R\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}(|x, x\rangle + |y, y\rangle), \quad (3D.20)$$

ce qui, au signe $-$ près, sans conséquence physique, est identique à l'état

$$|\Psi_{\text{EPR}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x, x\rangle + |y, y\rangle), \quad (3D.21)$$

introduit au complément 2C sans justification.

Remarque

(i) Remarquons que le couple d'axes orthogonaux \mathbf{Ox} , \mathbf{Oy} peut-être pris dans une orientation quelconque, dans le plan perpendiculaire à \mathbf{Oz} . Cela est relié au fait que l'état (3D.17) est invariant par rotation autour de \mathbf{Oz} .

(ii) Un calcul analogue peut être fait en considérant un filtrage des photons ν_1 et ν_2 suivant des directions quelconques. On trouve alors que la probabilité de détection conjointe derrière deux polariseurs effectuant une analyse de polarisation suivant des orientations \mathbf{a} et \mathbf{b} s'écrit comme dans le complément 2C

$$P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} \cos^2(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad (3D.22)$$

et cela même si les directions de propagation ne sont pas suivant un même axe \mathbf{Oz} . Cette formule permet, par intégration, de traiter le cas important en pratique où les photons sont capturés par des lentilles dans un angle solide fini.

(iii) En fait, le processus de cascade radiative est un processus global, et non pas en deux étapes bien séparées dans le temps. Si on prend en compte l'ensemble des directions d'émission et des fréquences possibles, on constate qu'il s'agit d'un processus de type niveau discret $|i\rangle$ couplé à un double continuum d'états finaux $|\Psi'\rangle$ et $|\Psi_r\rangle$. En généralisant le traitement de Weisskopf-Wigner, on peut montrer que la probabilité de trouver le système dans un état de type $|\Psi'\rangle$ (où l'atome est dans r) ne prend des valeurs notables qu'aux temps intermédiaires, tandis que la probabilité de le trouver dans un état de type $|\Psi_r\rangle$ (l'atome est dans l'état fondamental g) vaut 1 aux temps longs.

3D.3 Généralisation : sommation sur les fréquences

Le calcul que nous venons de détailler donne l'essence du mécanisme conduisant à l'intrication des deux photons émis (passage par un état intermédiaire où le premier photon et l'atome sont intriqués, puis émission d'un second photon aboutissant à un état où les deux photons sont intriqués). Mais il est irréaliste en ce sens qu'il a supposé que l'on effectuait un filtrage infiniment étroit sur les fréquences ω_ℓ et ω_k des photons se propageant respectivement vers $-\mathbf{Oz}$ et $+\mathbf{Oz}$. En réalité, on utilise des filtres interférentiels centrés respectivement sur les fréquences de résonance ω_1 et ω_2 , et de bandes passantes plus larges que les largeurs naturelles de ces deux raies. L'état final du champ après les filtres est alors une superposition de termes de la forme (3D.21) :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint d\omega_\ell d\omega_k C(\omega_\ell, \omega_k) \left(|x_\ell, x_k\rangle + |y_\ell, y_k\rangle \right), \quad (3D.23)$$

où $|x_\ell, x_k\rangle$ désigne une paire de photons de fréquences ω_ℓ et ω_k , se propageant respectivement vers les z négatifs et positifs, et polarisés linéairement suivant \mathbf{Ox} ; et de même pour $|y_\ell, y_k\rangle$. La normalisation de cet état impose

$$\iint d\omega_\ell d\omega_k |C(\omega_\ell, \omega_k)|^2 = 1. \quad (3D.24)$$

Les probabilités de photodétection totales sont alors simplement obtenues en sommant les probabilités élémentaires associées à chaque état élémentaire $(|x_\ell, x_k\rangle + |y_\ell, y_k\rangle)/\sqrt{2}$. On peut en effet, en principe, distinguer les résultats par l'énergie des photoélectrons émis. À titre d'exemple, écrivons la probabilité totale de photodétection conjointe dans les voies $+1$ et $+1$ de polariseurs I et II orientés suivant \mathbf{a} et \mathbf{b}

$$\begin{aligned} P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \frac{1}{2} \iint d\omega_\ell d\omega_k |C(\omega_\ell, \omega_k)|^2 \left| \langle +\mathbf{a}, +\mathbf{b} | (|x_\ell, x_k\rangle + |y_\ell, y_k\rangle) \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left| \langle +\mathbf{a}, +\mathbf{b} | (|x, x\rangle + |y, y\rangle) \right|^2 = \frac{1}{2} \cos^2(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \end{aligned}$$

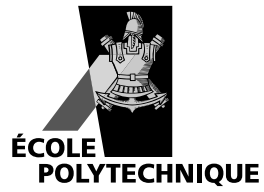
Le résultat est identique à celui que nous avons obtenu au complément 2C.

Au lieu de calculer une probabilité globale pour la paire de photons, on peut s'intéresser à des probabilités résolues en temps, par exemple à la probabilité de trouver $+1$ derrière le polariseur I entre t_1 et $t_1 + dt_1$ et de trouver $+1$ derrière le polariseur II entre t_2 et $t_2 + dt_2$. Le résultat est alors le produit de deux termes : l'un décrit la dépendance temporelle, et l'autre la dépendance en polarisation. Le terme relatif à la polarisation est celui que nous venons de calculer. Ce résultat est général et les calculs relatifs aux polarisations qui ont été faits dans le complément 2C s'appliquent intégralement aux probabilités de photodétection résolues en temps.

Le terme temporel peut se calculer en utilisant la méthode évoquée à la remarque (iii) ci-dessus. Le résultat décrit l'émission en cascade : la probabilité conjointe de détecter le photon ν_2 avec un retard τ par rapport à la détection du photon ν_1 s'écrit

$$\frac{dP(\nu_2 : t_1 + \tau | \nu_1 : t_1)}{d\tau} = \Gamma_r e^{-\Gamma_r \tau} \quad (3D.25)$$

où Γ_r est l'inverse de la durée de vie du niveau intermédiaire de la cascade.



ÉDITION 2006

Achevé d'imprimer le 9 janvier 2006 sur les presses
du Centre Poly-Média de l'École Polytechnique.



Dépôt légal : 1^{er} trimestre 2006
N° ISBN 2 – 7302 – 1316 – 3

Tome 1

IMPRIMÉ EN FRANCE