*DOCUMENT PÉDAGOGIQUE**

LES MODÈLES STRUCTURAUX EN PSYCHOLOGIE PRÉSENTATION D'UN MODÈLE : LISREL

Première partie

par F. BACHER**

SUMMARY

Structural models in Psychology. Presentation of a model : LISREL. — A structural model which use is growing in psychology, LISREL, is presented. In this first part, its main characteristics are described and a few recent examples of confirmatory factor analysis are reported. CFA constitutes an application of the model to the testing of hypotheses concerning the structure of a set of interdependent variables. A second part will concern the application of the model to the study of hypothetical causal relationships between variables some of which are considered independent and others dependent.

(Key words : *Confirmatory factor analysis, LISREL, Structural models.*)

Expliquer le comportement constitue un objectif essentiel pour le psychologue. Le développement des modèles structuraux en psychologie s'inscrit dans une conception de l'explication scientifique qui met l'accent sur la construction de modèles intelligibles, coordonnant un ensemble de lois.

Au cours de cette construction, le psychologue, souligne Reuchlin (1980), utilise deux démarches complémentaires, l'explication et l'interprétation, ayant toutes deux pour objet de mettre en relation deux discours inégalement intelligibles, et d'assurer ainsi un transfert d'intelligibilité du moins intelligible, qui porte souvent sur des constatations empiriques simplement juxtaposées, au plus intelligible qui est à la fois plus cohérent, plus théorique et plus économique.

* Le Comité de Rédaction du *Travail humain* a souhaité que soit créée dans la revue une rubrique dans laquelle figureraient des textes rédigés essentiellement à des fins d'enseignement : état d'une question, présentation d'un problème, d'une méthode...

L'objectif de ces textes est la présentation d'un exposé clair, voire un peu didactique, du thème traité et non l'originalité dans le fond.

Nous remercions Mlle Bacher qui a bien voulu inaugurer cette rubrique.

** Laboratoire de Psychologie différentielle, 41, rue Gay-Lussac, 75005 Paris. Ce travail a utilisé des moyens que nous devons à l'École pratique des Hautes Études, 3e Section, à l'Université René-Descartes, au Conservatoire national des Arts et Métiers (Service de Recherches de l'INETOP), au Centre national de la Recherche scientifique (UA 656).

Le Travail humain, tome 50, n° 4/1987

La notion de système tend, dans cette conception, à remplacer celle, plus restrictive, de cause.

Il ne s'agit pas seulement de déterminer si une variable indépendante, prise isolément, a un effet sur une variable dépendante mais de savoir comment s'organisent des ensembles de variables et comment s'articulent leurs effets lorsqu'elles jouent conjointement. On s'intéresse aux relations entre variables indépendantes et dépendantes, mais aussi aux relations entre variables interdépendantes ; on peut admettre des effets réciproques entre des variables s'influençant mutuellement ; on peut aussi s'interroger sur les variations de ce réseau de relations chez des sujets différents ou dans des situations différentes.

Une telle approche est particulièrement utile lorsqu'on veut passer de résultats obtenus dans des situations expérimentales, toutes choses égales par ailleurs, à des situations adaptatives complexes comme le sont les situations habituelles, dans lesquelles on sait que beaucoup de variables varient simultanément.

Ces modèles font, d'autre part, appel à une conception probabiliste de la causalité (voir, pour une discussion de cette conception, Mulaik, 1987). On ne s'attend pas à une dépendance fonctionnelle entre variables indépendantes et variables dépendantes. Ce sont les lois de probabilité des variables dépendantes et non la valeur particulière qu'elles prendront que les valeurs données aux variables indépendantes permettent de prévoir (Malinvaud, 1969, chap. 2).

Les modèles structuraux trouvent leur origine dans des courants de recherche et des méthodes statistiques qui se sont développés notamment en économie, en sociologie et en psychologie. Ils généralisent et intègrent l'analyse factorielle, la psychométrie classique, l'analyse de régression multiple, l'analyse des pistes causales, les modèles à équations multiples.

Au plan statistique, il s'agit d'un courant en plein essor, comme on pourra s'en convaincre en consultant un article récent de Bentler (1986) consacré à ses origines, à son développement au cours des vingt dernières années et à son état actuel.

La généralité de ces modèles, le fait qu'ils répondent aux besoins des chercheurs souhaitant parvenir à des systèmes explicatifs aussi complets que possible du comportement, le fait que très vite des logiciels aient été développés permettant leur mise en œuvre, expliquent sans doute qu'en quelques années ils aient connu une diffusion considérable et soient d'ores et déjà fréquemment utilisés en psychologie.

Il devient donc utile de les présenter, ne serait-ce que parce que tout lecteur de travaux psychologiques peut s'y trouver confronté.

Nous nous limiterons dans cet article, qui sera présenté en deux parties, au modèle qui est le plus utilisé actuellement, LISREL. Dans la première partie, nous en indiquerons les principales caractéristiques et illustrerons son utilisation à propos d'exemples d'analyse factorielle confirmatoire. Dans la seconde partie, nous présenterons et commenterons des recherches utilisant cette méthode pour l'analyse de systèmes de relations dont certaines sont orientées, logiquement ou chronologiquement, et peuvent être considérées comme causales.

Précisons que le logiciel correspondant, sur lequel nous avions attiré l'attention il y a quelques années (Bacher, 1984) est maintenant implanté au CIRCE et peut donc être facilement utilisé en France.

I — Les modèles structuraux

Les méthodes corrélationnelles auxquelles les modèles structuraux font largement appel sont parfois considérées, en psychologie, comme plus adaptées à la description de relations entre variables qu'à l'épreuve d'hypothèses relatives à ces relations.

Le fait que des méthodes aussi diverses que l'analyse de la variance, l'analyse factorielle, l'analyse de régression multiple, l'analyse des pistes causales relèvent toutes d'un même modèle linéaire général, les rapprochements que l'on peut opérer entre des courants de recherche qui se sont développés dans d'autres disciplines et ceux qui se sont développés en psychologie montrent que ce point de vue est trop limitatif. Ce n'est pas au niveau des méthodes d'analyse mais à celui de l'organisation des expériences que se situe la différence entre une approche que l'on peut qualifier de descriptivo-inductive (la description, guidée elle-même par certaines attentes suggérant souvent des hypothèses explicatives) et une approche hypothético-déductive.

Les deux approches, complémentaires, interviennent habituellement, en fonction du degré de connaissance préalable dont on dispose sur la question considérée, à des moments différents de la recherche. Ce n'est pas le cas, en général, lorsqu'on a recours à des modèles structuraux. En effet, un modèle structural consiste en une formalisation mathématique traduisant un certain nombre d'hypothèses relatives aux éléments essentiels d'un phénomène et aux lois qui le régissent. Il permet de déduire les conséquences logiques de ces hypothèses et de les confronter aux résultats de l'expérience. Pour les utiliser, il faut donc être en mesure de formuler certaines hypothèses sur les relations entre des variables multiples mesurées sur les mêmes sujets ; mais ces hypothèses peuvent être plus ou moins précises et elles peuvent n'avoir trait qu'à certaines des relations envisagées. Aussi le recours aux modèles structuraux relève-t-il souvent à la fois, et c'est là une des difficultés de leur utilisation, des deux approches : ils permettent d'éprouver des hypothèses, qui peuvent ne porter que sur certains aspects du modèle ; ils fournissent des éléments susceptibles d'être utilisés pour préciser et compléter le modèle initial, lorsque celui-ci n'était que partiellement spécifié.

Les principales étapes de la démarche sont les suivantes.

1 / Ayant défini un ensemble de variables qu'il juge importantes pour le problème considéré, le chercheur formule des hypothèses relatives aux effets de certaines de ces variables sur certaines autres. Il établit un modèle spécifiant ces effets à l'aide d'équations. Certains effets sont fixés *a priori* en fonction des hypothèses (par exemple, certains effets peuvent être supposés nuls) ; d'autres constituent des paramètres à estimer. Un graphe peut être utilisé pour représenter ces effets hypothétiques.

2 / Dans le cadre du modèle mathématique choisi, on estime les paramètres non fixés *a priori* des équations en ayant recours à des principes d'estimation classiques (moindres carrés, moindres carrés généralisés, maximum de vraisemblance). Les données analysées sont habituellement les variances et les covariances ou les corrélations des variables observées, d'où le terme parfois utilisé d'analyse des structures de covariance pour désigner ces méthodes.

3 / Il s'agit de savoir si l'on peut rendre compte de la structure des relations entre variables observées, telle qu'elle se manifeste dans les covariations de ces variables, à l'aide du modèle considéré. On vérifie l'adéquation du modèle aux données en comparant les données reconstruites à l'aide du modèle aux données observées.

4 / Le résultat de cette étape peut conduire à considérer le modèle comme compatible avec les données, à choisir entre plusieurs modèles ou à modifier le modèle initial jusqu'à ce que l'accord soit jugé satisfaisant. Cette dernière possibilité est extrêmement intéressante en ce qu'elle traduit une évolution, née de la confrontation avec les données, de la conception que l'on se faisait du phénomène étudié. Mais, suggérée par ces données, elle nécessite une mise à l'épreuve du nouveau modèle sur d'autres données.

II — Le modèle LISREL

Il existe plusieurs courants qui ont conduit au développement de modèles structuraux plus ou moins généraux. Plusieurs logiciels, correspondant à des modèles différents, ont été proposé (voir Bentler, 1980, 1986 ; Kiiveri et Speed, 1982 ; Long, 1983 *b*). Celui qui est de loin le plus utilisé actuellement en psychologie est LISREL qui a été développé par Jöreskog avec Van Thillo (1973) et Sörbom (1985). Il présente, pour les psychologues, l'avantage d'avoir été conçu par des statisticiens qui ont travaillé pendant de longues années avec des psychologues et connaissent bien les problèmes méthodologiques qui se posent dans leur discipline, notamment lorsqu'ils travaillent sur des données d'observation.

Le modèle LISREL intègre essentiellement un modèle d'analyse factorielle, qui généralise la théorie de la mesure, et un modèle d'équations simultanées, jusqu'ici surtout utilisé en économétrie, qui généralise des méthodes telles que l'analyse de régression multiple et l'analyse des pistes causales *(path analysis)*.

Cette intégration ouvre des perspectives nouvelles quant au type de problèmes pouvant être traités. On peut, comme avec les méthodes d'analyse factorielle classique, décrire la structure de variables considérées comme interdépendantes, éprouver des hypothèses relatives à cette structure, préciser les relations entre les variables observées et des variables latentes qui sont ici des facteurs. On peut, comme avec l'analyse des pistes causales, estimer les paramètres de modèles traduisant des hypothèses relatives aux effets de variables observées considérées comme indépendantes sur des variables observées considérées comme dépendantes. Mais on peut, en outre, analyser des modèles admettant des effets réciproques entre variables (modèles non récursifs) ; on peut, dans cette analyse, remplacer les variables observées par des variables latentes qui pourront être soit des facteurs, soit les « notes vraies » de la théorie de la mesure, et tenir compte ainsi d'erreurs de mesure dans les variables observées ; on peut se situer au niveau de variables théoriques plus abstraites et plus générales que les variables observées. On peut combiner ces différents types d'analyse. On peut aussi analyser des données obtenues dans des populations différentes et éprouver des hypothèses relatives à l'égalité de certains paramètres dans ces populations.

A / *Le modèle mathématique*

Comme son nom l'indique, LISREL (Linear Structural Relations) est un modèle linéaire. Ce modèle est utilisable sur des variables ayant le niveau d'échelles d'intervalles ou considérées comme telles[1]. On en trouvera une présentation plus détaillée dans les ouvrages de Long (1983 *a* et *b*) et de Jöreskog et Sörbom (1985).

Le modèle comporte deux parties : un modèle d'équations structurales, qui spécifie les relations entre variables latentes, et un modèle de mesure, qui indique comment les variables latentes sont mesurées en termes de variables observées.

1 / *Modèle d'équations structurales*

Ce modèle permet de formaliser et d'éprouver des hypothèses relatives aux influences qu'exercent des variables explicatives sur des variables à expliquer.

Soit $\boldsymbol{\eta}$ un vecteur aléatoire de variables latentes dépendantes (ou endogènes) que l'on souhaite expliquer et $\boldsymbol{\xi}$ un vecteur aléatoire de variables latentes indépendantes (ou exogènes) explicatives[2]. Les variables η sont liées aux autres variables η et aux variables ξ par un système d'équations linéaires.

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{B}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\zeta}$$

où $\mathbf{B}$ et $\boldsymbol{\Gamma}$ sont des matrices de coefficients (β et γ respectivement). Les éléments de $\mathbf{B}$ représentent les effets causaux directs des variables η sur les autres variables η ; les éléments de $\boldsymbol{\Gamma}$ représentent les effets causaux directs des variables ξ sur les variables η. $\boldsymbol{\zeta}$ est un vecteur aléatoire de variables résiduelles, parfois qualifiées d' « erreurs dans les équations », qui correspondent au fait que les variables η ne peuvent être prédites parfaitement à l'aide des autres variables η et des variables ξ figurant dans les équations.

Les hypothèses relatives à la partie structurale du modèle sont que $\boldsymbol{\zeta}$ est sans corrélation avec $\boldsymbol{\xi}$ et que la matrice $(\mathbf{I} - \mathbf{B})$ est non singulière (la matrice $\mathbf{B}$ est définie, dans les versions les plus récentes du modèle, LISREL V et VI, comme ayant des 0 dans la diagonale). Les variables η, ξ et ζ sont mesurées en écarts à leurs moyennes.

2 / *Modèle de mesure*

La partie précédente du modèle avait trait aux relations entre des variables latentes, non observables. La partie du modèle relative à la *mesure* a trait aux relations entre les variables latentes, η et ξ, et les variables observées y et x. Ces relations sont exprimées par les deux systèmes d'équations

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\Lambda}_y \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\epsilon}$$
$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\Lambda}_x \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\delta}$$

où $\mathbf{y}$ et $\mathbf{x}$ sont des vecteurs de variables observées, $\boldsymbol{\epsilon}$ et $\boldsymbol{\delta}$ sont des vecteurs d'erreurs de mesure des y et des x respectivement et où $\boldsymbol{\Lambda}_y$ et $\boldsymbol{\Lambda}_x$ sont les matrices des coefficients de régression (λ_y et λ_x) des y sur les η et des x sur les ξ.

Les hypothèses de la partie du modèle relative à la mesure sont que $\boldsymbol{\epsilon}$ est sans corrélation avec $\boldsymbol{\eta}$; $\boldsymbol{\delta}$ est sans corrélation avec $\boldsymbol{\xi}$; $\boldsymbol{\zeta}$, $\boldsymbol{\epsilon}$ et $\boldsymbol{\delta}$ sont mutuellement sans corrélation ; les variables y, x, ε, δ sont mesurées en écarts à leurs moyennes.

1. Le logiciel offre la possibilité de calculer des corrélations « polychoriques » (tétrachoriques, ennéachoriques, etc.) entre variables.
2. Les matrices et vecteurs sont désignés par des lettres en caractères gras.

Les paramètres du modèle sont les éléments des matrices **B**, **Γ**, Λ_y, Λ_x, d'une part, ceux des matrices de covariances des variables latentes, d'autre part : **Φ** et **Ψ**, matrices des covariances des ξ et des ζ respectivement, Θ^ε et Θ^δ, matrices des covariances des ε et des δ respectivement[3].

Compte tenu des hypothèses indiquées ci-dessus, on peut reconstituer la matrice des covariances entre variables y et x à l'aide des paramètres. L'estimation de ces paramètres est faite de façon à minimiser l'écart entre la matrice des covariances reconstituées **Σ** et la matrice des covariances observées **S**.

On trouvera en annexe un tableau des différentes matrices du modèle, l'expression de la matrice **Σ** en fonction des matrices de paramètres et les fonctions minimisées (fonctions d'ajustement F) utilisées par chacune des méthodes d'estimation proposées (moindres carrés, maximum de vraisemblance).

B / *Principes de mise en œuvre*

Après quelques indications générales sur le champ d'application du modèle, nous exposerons, dans cette première partie, la façon de l'utiliser pour éprouver par analyse factorielle des hypothèses relatives à la structure d'un ensemble de variables.

Les données analysées peuvent être les moments non centrés d'ordre 2 (sommes de carrés et de produits centrés non sur la moyenne mais sur 0), les variances et covariances ou les corrélations entre variables. Le choix dépend du sens que la métrique des variables permet d'accorder à des comparaisons de moyennes, de variances et de corrélations établies sur des variables différentes ou dans des groupes de sujets différents et de l'intérêt que l'on porte à ces comparaisons.

Le modèle exposé ici vaut aussi bien pour l'analyse des variances et covariances que pour celle des corrélations, qui sont les covariances de variables réduites. Il nécessite quelques modifications pour l'analyse de moments non centrés d'ordre 2.

Il est possible d'utiliser des sous-modèles du modèle général en n'ayant recours qu'à certaines des catégories de variables η, ξ, y, x. Par exemple, un modèle dans lequel n'existent que des variables ξ et x se réduit au sous-modèle de mesure $\mathbf{x} = \Lambda_x \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\delta}$. Un modèle dans lequel il n'y a que des variables y et x se réduit au sous-modèle $\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{y} + \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{x} + \boldsymbol{\zeta}$: en l'absence de variables latentes, les relations structurales sont établies entre variables observées et il n'y a pas lieu de faire intervenir de modèle de mesure.

Nous prendrons, pour illustrer les principes de mise en œuvre, le premier de ces sous-modèles lorsqu'il est utilisé comme modèle d'analyse factorielle en facteurs communs et uniques. Dans ce cas, les variables x sont les variables observées, les variables latentes ξ, les facteurs communs, les variables latentes δ, les facteurs uniques, Λ_x, la matrice des coefficients de régression des x sur les ξ (saturations des variables dans les facteurs).

Nous nous placerons dans le cas où l'utilisateur dispose de certaines hypothèses relatives à l'organisation des variables (analyse factorielle confirmatoire)[4].

3. Les covariances des η, qui peuvent être exprimées en fonction des autres paramètres du modèle, ne sont pas considérées comme des paramètres indépendants à estimer.

4. Bien que l'épreuve d'hypothèses ait été pratiquée de longue date par des méthodes d'analyse factorielle classique (voir Reuchlin, 1964 ; Bacher, 1985), le terme « analyse factorielle confirmatoire » tend actuellement à être réservé à l'approche proposée par Jöreskog et Sörbom.

Par exemple, Jöreskog et Sörbom (1985) réanalysent les corrélations entre 9 des 24 tests psychologiques appliqués par Holzinger et Swineford (1939) à 145 élèves de 7e et 8e année de scolarité d'une école secondaire de Chicago. Les trois premiers tests ont été choisis pour mesurer la perception visuelle de relations spatiales, les trois suivants, la compréhension verbale, les trois derniers, la rapidité perceptive[5].

1 / *Spécification du modèle en fonction des hypothèses*

Les hypothèses peuvent tout d'abord être traduites à l'aide d'un *graphe* du type de ceux utilisés en analyse de parcours. Les conventions habituelles sont d'encadrer les variables observées x et y, d'encercler les variables latentes η et ξ, de faire figurer sans les encercler les variables ε, δ et ζ. Le modèle fait

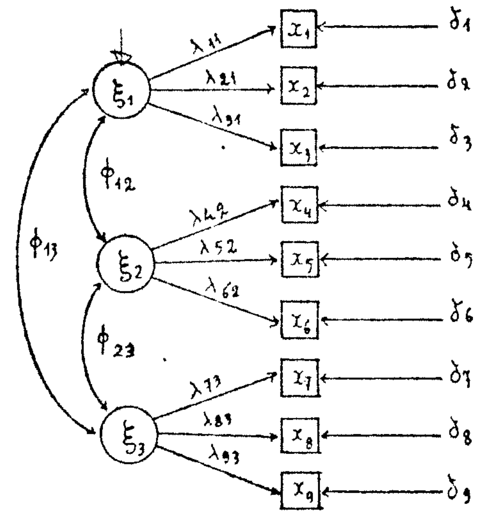

Fig. 1. — Graphe d'un modèle d'analyse factorielle confirmatoire de 9 tests psychologiques

(Path diagram of a confirmatory factor analysis model for 9 psychological tests)

appel ici à 12 variables latentes : 3 facteurs communs affectant chacun plusieurs variables spécifiées à l'avance et jouant le rôle de variables ξ (nous les appellerons ξ_1, ξ_2 et ξ_3) et 9 facteurs uniques δ_1 à δ_9 affectant chacun une variable x. On fait l'hypothèse que la 1re variable observée dépend du facteur ξ_1 et du 1er facteur unique, δ_1. Des flèches orientées de ξ_1 vers x_1 et de δ_1 vers x_1 traduisent ces hypothèses. De même, on fait l'hypothèse que la 2e variable observée dépend du facteur commun ξ_1 et du facteur unique δ_2. Par contre, on n'attend pas d'effet des facteurs ξ_2 et ξ_3 sur les trois premières variables, ce qui se traduit par une absence de flèche entre ces facteurs et ces variables. Les hypothèses relatives aux autres variables du modèle sont traduites par le graphe (fig. 1).

5. En voici la liste : 1. Perception visuelle ; 2. Cubes ; 3. Losanges ; 4. Compréhension de paragraphes ; 5. Complètement de phrases ; 6. Signification de mots ; 7. Addition ; 8. Comptage de points ; 9. Majuscules droites ou courbes. On trouvera une brève description de ces épreuves (à l'exception de Losanges, non citée) dans Holzinger et Harman, 1941, Appendice B1.

Dans un modèle d'analyse factorielle classique, les facteurs uniques sont supposés sans corrélations. C'est aussi ce qu'on a supposé ici ; rien ne les relie sur le graphe. Par contre, on peut faire l'hypothèse qu'il existe des corrélations entre les trois facteurs communs. Ces corrélations sont représentées par des doubles flèches courbes. De telles flèches indiquent qu'on ne fait pas d'hypothèse sur l'orientation de la relation, qu'il s'agit d'une corrélation sans interprétation causale.

Les hypothèses peuvent aussi être traduites par le *système d'équations* reliant les variables observées aux variables latentes.

$$x_1 = \lambda_{11}\,\xi_1 + \delta_1$$
$$x_2 = \lambda_{21}\,\xi_1 + \delta_2$$
$$\ldots$$
$$x_4 = \lambda_{42}\,\xi_2 + \delta_4$$
$$\ldots$$
$$x_9 = \lambda_{93}\,\xi_3 + \delta_9$$

Ces équations sont obtenues de la façon suivante.

Une équation est établie pour chaque variable à laquelle aboutissent des flèches dans le graphe. Cette variable figure à gauche de l'équation ; à droite, on trouve autant de termes que de flèches orientées dans un seul sens aboutissant à la variable considérée ; la convention habituelle, en ce qui concerne les indices, est de mettre en premier celui de la variable à laquelle aboutit la flèche et en deuxième celui de la variable d'où elle vient. On remarque, dans la première équation, que le seul facteur commun à intervenir est ξ_1, ce qui revient à poser comme nuls les coefficients λ_{12} et λ_{13} de x_1 en ξ_2 et en ξ_3. L'équation matricielle $x = \Lambda_x \xi + \delta$ résume le système. Les hypothèses relatives aux facteurs communs se traduisent par certaines caractéristiques des éléments de la matrice des coefficients λ. Dans cette matrice Λ_x, que l'on trouvera tableau I, on a indiqué les coefficients supposés nuls et ceux qui doivent être estimés.

Les autres hypothèses du modèle ont trait aux variances et covariances des variables latentes. Dans cet exemple, l'hypothèse d'une absence de corrélation entre facteurs uniques se traduit par l'exigence que la matrice θ^δ soit diagonale. Les variables latentes n'ont pas de métrique définie. Pour que l'estimation soit possible il faut en donner une aux variables η et ξ. On peut le faire de diverses façons. On peut, par exemple, donner à chaque variable latente la métrique d'une des variables observées en posant égal à 1 le coefficient λ qui les relie. Dans le cas d'une analyse factorielle portant sur des corrélations, c'est plutôt en fixant à 1 la variance des facteurs communs (variables ξ) qu'on leur donne une métrique. C'est cette valeur qui a été portée sans la diagonale de la matrice Φ (tableau I). Les variances des variables δ (diagonale de la matrice θ^δ) constituent des paramètres à estimer ; elles correspondent à l'unicité de chaque variable.

L'hypothèse que les facteurs communs peuvent être en corrélation conduit à considérer les corrélations φ_{12}, φ_{13}, φ_{23} comme trois paramètres à estimer (la matrice Φ est symétrique).

Dans le modèle LISREL, il est possible de fixer la valeur de certains paramètres, comme on vient de l'indiquer. Il est aussi possible de contraindre

TABLEAU I

Matrices correspondant au graphe de la figure 1
(Analyse factorielle confirmatoire de 9 tests psychologiques)

(Matrices corresponding to Figure 1 path diagram
(confirmatory factor analysis of 9 psychological test))

	Λ_x				θ^δ										Φ		
	ξ_1	ξ_2	ξ_3		1	2	3	4	5	6	7	8	9		ξ_1	ξ_2	ξ_3
x_1	λ_{11}	0	0	1	θ_{11}	0	0	0	0	0	0	0	0	ξ_1	1	φ_{12}	φ_{13}
x_2	λ_{21}	0	0	2	0	θ_{22}	0	0	0	0	0	0	0	ξ_2	φ_{21}	1	φ_{23}
x_3	λ_{31}	0	0	3	0	0	θ_{33}	0	0	0	0	0	0	ξ_3	φ_{31}	φ_{32}	1
x_4	0	λ_{42}	0	4	0	0	0	θ_{44}	0	0	0	0	0				
x_5	0	λ_{52}	0	5	0	0	0	0	θ_{55}	0	0	0	0				
x_6	0	λ_{62}	0	6	0	0	0	0	0	θ_{66}	0	0	0				
x_7	0	0	λ_{73}	7	0	0	0	0	0	0	θ_{77}	0	0				
x_8	0	0	λ_{83}	8	0	0	0	0	0	0	0	θ_{88}	0				
x_9	0	0	λ_{93}	9	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_{99}				

plusieurs paramètres à avoir une même valeur, non précisée à l'avance (dans ce cas, la valeur commune à ces paramètres compte pour un seul paramètre à estimer).

Les paramètres sont finalement fixés, contraints à être égaux à d'autres ou libres.

2 / *Estimation des paramètres*

L'estimation des paramètres libres ou contraints à être égaux sans que leur valeur soit précisée à l'avance est opérée par le programme en tenant compte des spécifications qui ont été apportées au modèle général par le chercheur, en fonction des hypothèses qu'il a faites sur les relations existant entre variables ; ces hypothèses ont été traduites en un certain nombre de contraintes portant sur la valeur de certains paramètres. L'estimation est faite, comme nous l'avons indiqué plus haut, de façon telle que la matrice des covariances reconstituée à l'aide des paramètres du modèle, Σ, soit aussi proche que possible (au sens des moindres carrés, des moindres carrés généralisés ou du maximum de vraisemblance) de la matrice des covariances observées, **S**. Cependant, cette estimation n'a de sens que si les paramètres ont une valeur déterminée, s'ils sont identifiés.

3 / *Identification des paramètres*

La notion d'identification des paramètres d'un modèle est classique en économétrie. Elle est peut-être moins familière à beaucoup de psychologues. Pour en faire comprendre la nature, nous prendrons le cas de l'analyse factorielle, nous inspirant de l'exposé qu'en fait Van de Geer (1971, chap. 15).

En analyse factorielle classique, on sait qu'il existe une multiplicité de solutions permettant de rendre également compte des corrélations entre un ensemble de variables, et qu'on peut passer de l'une à l'autre de ces solutions par rotation. Le modèle est sous-identifié. Une solution initiale est obtenue en introduisant des contraintes supplémentaires (par ex., dans le cas d'une analyse en facteurs principaux, on exige que les facteurs soient orthogonaux et que chaque facteur à son tour rende compte du maximum de variance). On obtient ainsi une solution unique, identifiée, rendant compte des données de façon satisfaisante si on a gardé dans la solution un nombre suffisant de facteurs. Lorsqu'on procède à des rotations, ceci revient à abandonner certaines de ces contraintes pour les remplacer par d'autres issues, éventuellement, des hypothèses du chercheur. Si ces contraintes sont assez nombreuses, la solution peut devenir suridentifiée (on dit plutôt, dans ce contexte, surdéterminée) : il n'existe pas nécessairement de solution qui puisse à la fois respecter l'ensemble des contraintes et rendre compte de façon satisfaisante des données. Il devient alors possible d'éprouver les hypothèses que traduisent les contraintes introduites en examinant dans quelle mesure elles sont compatibles avec les données.

Lorsqu'on a recours à des modèles structuraux, la solution recherchée est d'emblée celle qui correspond aux hypothèses de l'utilisateur. On cherche une solution unique, identifiée et même suridentifiée, afin de pouvoir soumettre les hypothèses à l'épreuve des faits.

Formellement, une fois qu'on a spécifié un modèle, si on connaît sa structure, c'est-à-dire la valeur de ses paramètres, on peut reconstituer une matrice Σ qui est unique. Mais plusieurs structures peuvent générer la même matrice Σ. Ces structures sont dites équivalentes. Si un paramètre a la même valeur dans toutes les structures équivalentes, il est identifié. Si tous les paramètres d'un modèle sont identifiés, le modèle tout entier est identifié. Dans le cas contraire, l'estimation effectuée par le programme peut n'avoir aucun sens pour les paramètres non identifiés et il est recommandé d'ajouter des contraintes pour rendre le modèle identifié avant de procéder à l'estimation.

S'assurer qu'un modèle est identifié est une opération qui peut être assez difficile. Il faut, en principe, à partir des équations structurales qui définissent le modèle, exprimer les variances et covariances des variables observées en fonction des paramètres, puis s'assurer qu'on dispose de suffisamment d'éléments pour déterminer la valeur de chaque paramètre (les éléments dont on dispose étant précisément les variances et covariances des variables observées).

Par exemple, à partir du système d'équations

$$x_1 = \lambda_{11}\,\xi_1 + \delta_1$$

$$x_2 = \lambda_{21}\,\xi_1 + \delta_2$$

$$\dots$$

$$x_3 = \lambda_{93}\,\xi_3 + \delta_9$$

on obtient la variance de x_1 en multipliant la 1re équation par elle-même et en prenant les espérances mathématiques :

$$E(x_1^2) = \lambda_{11}^2\,E(\xi_1^2) + \lambda_{11}\,\delta_1\,E(\xi_1) + E(\delta_1^2)$$

comme $E(\xi_1) = 0$, on trouve $\text{var}\,(x_1) = \lambda_{11}^2\,\varphi_{11} + \theta_{11}^\delta$;

on obtient la covariance de x_1 et x_2 en multipliant la première équation par la deuxième et en prenant les espérances mathématiques, etc. Il faudrait ensuite vérifier que le système permet de calculer la valeur de tous les paramètres.

Pratiquement, il existe un certain nombre de critères nécessaires (mais non suffisants) pour qu'un modèle soit identifié (voir, par ex., Asher, 1983 ; Berry, 1984). Le plus simple consiste à comparer le nombre de paramètres à estimer, t, au nombre de variances et covariances dont on dispose $k(k+1)/2$ où k est le nombre de variables observées. Il faut que le premier de ces nombres soit plus petit ou égal au second pour que le modèle puisse être identifié.

D'autre part, le programme fournit des indications sur l'identification du modèle qui, sans être parfaitement sûres sont presque toujours fiables (Jöreskog et Sörbom, 1985).

Enfin, il faut remarquer que, même dans un modèle non identifié, certains paramètres peuvent l'être et que leur estimation peut présenter un intérêt.

Dans l'exemple des 9 tests psychologiques, on dispose de

$$(9)\,(9+1)/2 = 45 \text{ variances et covariances}$$

et on a seulement 21 paramètres à estimer ($9\,\lambda$, $3\,\varphi$, $9\,\theta$). Par ailleurs, le programme ne donne aucune indication de non-identification. On pourrait vérifier que ce modèle est suridentifié.

4 / *Examen des résultats et valeur de l'ajustement*

Le tableau II donne la solution obtenue pour ce modèle en appliquant la méthode du maximum de vraisemblance. Les valeurs θ ont été portées en colonne (la matrice θ^δ ne comportant de valeurs non nulles que dans la diagonale principale).

Tableau II

Résultats de l'analyse factorielle confirmatoire de 9 tests psychologiques. Les valeurs marquées (*) ont été fixées. θ^δ est diagonale

(Results of the confirmatory factor analysis of 9 psychological tests. Marked values (*) were fixed. θ^δ is diagonal)

	Λ_x					Φ		
	ξ_1	ξ_2	ξ_3	θ^δ		ξ_1	ξ_2	ξ_3
x_1	.673	0*	0*	.548	ξ_1	1*		
x_2	.513	0*	0*	.737	ξ_2	.543	1*	
x_3	.684	0*	0*	.532	ξ_3	.511	.320	1*
x_4	0*	.867	0*	.248				
x_5	0*	.830	0*	.311	$\chi^2_{24} = 52.62$ (P = .001)			
x_6	0*	.826	0*	.318				
x_7	0*	0*	.662	.562	GFI = .928			
x_8	0*	0*	.797	.365	AGFI = .866			
x_9	0*	0*	.681	.536	RMR = .075			

A la différence de ce qui se passe dans une analyse factorielle classique, une inadéquation du modèle aux données ne peut se manifester par des écarts à la forme prévue pour la matrice Λ_x : cette forme a été imposée ; la valeur des paramètres fixés a été posée par hypothèse et non pas estimée. Aussi, dans la matrice Λ_x, on ne peut, dans notre exemple, obtenir de saturations non nulles des trois premiers tests que dans le premier facteur, des trois tests suivants que dans le deuxième facteur, etc.

Ce sont d'autres signes qui permettent de juger du caractère acceptable du modèle par rapport aux données. Le programme en fournit un très grand nombre que nous ne détaillerons pas tous, nous limitant à l'indication de quelques aspects importants.

a / Examen de la solution

Tout d'abord, il faut s'assurer que la solution ne comporte pas de valeur inadmissible pour certains paramètres : variances négatives, corrélations $> |1|$, etc. Dans l'exemple, la solution ayant été standardisée par le choix de variances des ξ égales à 1, les λ sont des coefficients de régression partiels réduits qui, s'ils dépassent $|1|$, ne doivent le faire que légèrement ; les covariances des ξ (valeurs non diagonales de la matrice Φ) sont des corrélations ; elles ne doivent pas dépasser $|1|$; les θ sont des unicités ; ils ne doivent pas dépasser 1. On n'observe, dans la solution obtenue, aucune valeur inadmissible des paramètres estimés. Elle est donc, en principe, acceptable.

On peut vérifier que les variances d'erreur (ici les θ) ne sont pas trop fortes ; on pourrait vérifier, pour un modèle comportant des variables dépendantes, qu'une part suffisante de leur variance est expliquée.

Dans le cas d'une estimation par maximum de vraisemblance, on dispose aussi des erreurs types des différentes estimations ; elles ne doivent pas être trop fortes ; des tests t permettent, par ailleurs, pour chaque paramètre, d'éprouver l'hypothèse qu'il ne diffère pas de 0.

b / Indices d'ajustement global

D'autres indices ont trait à l'ajustement global du modèle.

Dans le cas d'une estimation par maximum de vraisemblance, on dispose d'une mesure de χ^2 qui a pour valeur $(N-1)$ fois la valeur minimum de la fonction d'ajustement pour le modèle considéré (N étant le nombre de sujets). Rappelons que les paramètres ont été estimés de façon à minimiser cette fonction F qui traduit l'écart entre la matrice des covariances observées, $\mathbf{S}$, et la matrice des covariances reconstituées à l'aide du modèle, Σ. χ^2 est nul si l'ajustement est parfait. Sa valeur croît lorsque l'ajustement devient moins bon. Ainsi, plus χ^2 est faible, meilleur est l'ajustement.

A certaines conditions, χ^2 peut être utilisé comme épreuve de signification : si le modèle est correct, l'effectif suffisant et aucune cause d'invalidation présente, la mesure de χ^2 est la statistique permettant, à partir du rapport de vraisemblance, d'éprouver la signification de l'écart entre la matrice Σ obtenue à partir du modèle avec ses contraintes, et une matrice Σ' correspondant à un modèle sans contrainte (modèle qui ajuste parfaitement la matrice des covariances observées, $\mathbf{S}$). Ce χ^2 a pour degrés de liberté $k(k+1)-t$ où k est le nombre de variables observées et t le nombre de paramètres estimés. Le niveau de probabilité de χ^2 est la probabilité d'obtenir une valeur de χ^2 plus élevée que celle obtenue si le modèle est correct. En outre, lorsque deux modèles sont emboîtés, c'est-à-dire ont les mêmes spécifications, avec seulement des restrictions additionnelles dans un des deux modèles, la différence de χ^2, avec pour degrés de liberté la différence de degrés de liberté, permet d'éprouver l'hypothèse que les nouvelles restrictions n'entraînent pas de baisse significative de la valeur de l'ajustement.

Cependant, les causes d'invalidation de ces épreuves sont nombreuses. Jöreskog et Sörbom soulignent les points suivants. On sait généralement d'avance que le modèle n'est pas strictement correct. Le test n'est valide que si les variables observées ont une distribution multinormale. Il n'est valide que si on a analysé les covariances ; il ne s'applique pas, en particulier, aux corrélations. En outre, si N est suffisamment grand (ce qui est nécessaire pour que le test soit valide), le moindre écart devient significatif et fait rejeter tout modèle dont l'ajustement n'est pas parfait. Aussi l'intérêt de telles épreuves est-il douteux.

Les auteurs rejoignent, on le voit, les critiques qui ont pu être faites par ailleurs aux épreuves de signification.

Ils recommandent alors d'utiliser χ^2 comme une mesure de l'ajustement plutôt que comme une épreuve de signification et de le comparer à son nombre de degrés de liberté, utilisé comme terme de référence, pour juger de sa grandeur. Cette mesure est surtout utile pour comparer deux modèles ajustés aux mêmes données (N étant ainsi le même) différant uniquement par l'adjonction ou la suppression d'une ou plusieurs contraintes (modèles emboîtés). Si, par exemple, on supprime une contrainte en libérant un des paramètres précédemment fixés, l'ajustement sera généralement amélioré, mais on aura perdu un degré de liberté. Dans la mesure où la baisse de χ^2 est importante par rapport à la différence de degrés de liberté, le gain est sans doute réel. Dans le cas contraire, il peut ne résulter que de particularités de l'échantillon.

Dans l'exemple des 9 tests psychologiques, $\chi^2 = 52,62$ avec 24 *d.l* et un niveau de probabilité de .001. χ^2 vaut ici un peu plus de deux fois son nombre de degrés de liberté, ce qui est généralement jugé par les auteurs à la limite de l'acceptable (rappelons que l'ajustement tend à être d'autant meilleur que χ^2 est faible). Le programme fournit, pour chaque paramètre fixé, un « indice de modification », qui indique de combien χ^2 baisserait au minimum si on libérait ce seul paramètre sans modifier la valeur des autres. Dans l'exemple, admettre une saturation non nulle de Majuscules droites et courbes dans le facteur de Perception visuelle (en plus de celle qu'a cette variable dans le facteur de Rapidité perceptive) pourrait améliorer l'ajustement de façon importante. Il faut bien voir cependant que modifier ainsi le modèle constitue une révision des hypothèses initiales, révision qui doit être acceptable théoriquement. Ici, la nature de la variable permet de penser que c'est le cas. Quand on opère cette révision, on obtient un ajustement nettement meilleur : $\chi^2 = 29,01$ avec 23 *d.l* et un niveau de probabilité de .180. La baisse de χ^2 (23,61) comparée à la baisse du nombre de degrés de liberté (1) est importante. Cette statistique est elle-même la mesure d'un χ^2 à 1 degré de liberté.

La libération de ce paramètre modifie la valeur de tous les autres, mais de façon modérée comme on peut le constater en comparant les tableaux II et III.

Plusieurs autres indices d'ajustement global sont proposés par Jöreskog et Sörbom. On trouvera leur définition précise en annexe. Ce sont GFI *(goodness of fit index)*, qui indique la proportion de variances et de covariances dont

X
K
K
X
K

TABLEAU III

Résultats de l'analyse factorielle confirmatoire de 9 tests psychologiques (modèle modifié admettant une influence de ξ_1 sur x_9)

(Results of the confirmatory factor analysis of 9 psychological tests (modified model admitting an influence of ξ_1 on x_9))

	Λ_x					Φ		
	ξ_1	ξ_2	ξ_3	θ^δ		ξ_1	ξ_2	ξ_3
x_1	.708	0*	0*	.498	ξ_1	1.*		
x_2	.483	0*	0*	.766	ξ_2	.557	1.*	
x_3	.650	0*	0*	.578	ξ_3	.390	.223	1.*
x_4	0*	.868	0*	.247				
x_5	0*	.830	0*	.311	$\chi^2_{23} = 29.01$	(P = .180)		
x_6	0*	.825	0*	.319				
x_7	0*	0*	.681	.536	GFI = .958			
x_8	0*	0*	.859	.262	AGFI = .917			
x_9	.457	0*	.419	.467	RMR = .045			

rend compte le modèle, et AGFI *(adjusted goodness of fit index)*, qui ajuste GFI pour les degrés de liberté. Tous deux varient entre 0 et 1 (bien qu'ils puissent théoriquement devenir négatifs) et sont indépendants de N. L'ajustement est d'autant meilleur qu'ils sont plus proches de 1. RMR *(root mean square residual)* est une mesure de la moyenne des variances et covariances résiduelles, mais ne peut s'interpréter qu'en fonction de la taille des variances et covariances observées dans **S**. L'ajustement est d'autant meilleur que RMR est plus faible.

Dans l'exemple des 9 tests psychologiques, on obtient, pour le modèle initial, GFI = .928, AGFI = .866, RMR = .075 et, pour le modèle modifié, GFI = .958, AGFI = .917, RMR = .045. Comme il s'agit de modèles emboîtés appliqués aux mêmes données, tous les indices des deux modèles peuvent être comparés. On constate une amélioration de l'ajustement lorsqu'on passe du modèle initial au modèle modifié.

Un autre indice d'ajustement fréquemment utilisé a été proposé par Bentler et Bonett (1980). Il mesure l'accroissement d'ajustement entre deux modèles emboîtés M_k et M_l appliqués aux mêmes données par rapport à l'ajustement minimum que l'on obtiendrait avec un modèle « nul » M_0, contraint au maximum : $\Delta_{kl} = \dfrac{F_k - F_l}{F_0}$ *(normed fit index)*.

La difficulté est de définir M_0. Bentler et Bonett proposent, dans le cas général, de considérer comme modèle nul un modèle dans lequel toutes les covariances sont contraintes à être nulles, seules les variances restant libres. Δ_{kl} mesure un accroissement relatif d'ajustement.

c / Informations détaillées

L'examen des indices d'ajustement global ne suffit pas, dans le cas d'un ajustement insuffisant, à déterminer sur quels points il n'est pas satisfaisant. Nous avons déjà indiqué deux informations propres à chaque paramètre pouvant être utilisées : les erreurs types, qui permettent de déceler ceux qui ne

peuvent être estimés avec une précision suffisante à partir des données dont on dispose, et les indices de modification qui permettent de connaître l'amélioration qui pourrait être apportée à l'ajustement du modèle par la libération d'un paramètre fixé ou contraint. On peut encore examiner les carrés des corrélations multiples de chaque variable observée (part de variance de la variable dont rend compte le modèle).

On peut aussi examiner de façon détaillée les résidus (écarts entre les éléments homologues de **S** et de **Σ**) et les résidus normalisés (résidus rapportés à la racine carrée de leur variance asymptotique) dont le programme fournit un graphique. On trouvera leur expression en annexe.

Dans l'exemple des 9 tests psychologiques, on obtient des résidus (écarts entre les corrélations observées et les corrélations reconstituées à l'aide du modèle) relativement élevés, plusieurs étant de l'ordre de | .07 | et l'un d'eux atteignant même — .11. De tels résidus seraient probablement jugés trop élevés dans une analyse factorielle classique. Sans doute faut-il en voir l'origine dans le caractère quelque peu « idéalisé » des modèles de l'analyse factorielle confirmatoire qui supposent, par exemple, qu'un certain nombre de saturations sont exactement nulles.

III — EXEMPLES DE TRAVAUX UTILISANT L'ANALYSE FACTORIELLE CONFIRMATOIRE

De nombreux travaux utilisent actuellement l'analyse factorielle confirmatoire, dans des domaines très variés de la psychologie.

Nous nous limiterons à deux exemples, l'un dans lequel l'hypothèse d'une organisation hiérarchique des variables a été envisagée, l'autre dans lequel on a cherché à étudier la stabilité de différences individuelles dans des groupes de sujets examinés à plusieurs reprises à des âges différents.

L'hypothèse d'une organisation hiérarchique des variables, classique quoique non toujours admise dans le domaine des aptitudes mentales (voir, par ex., Reuchlin, 1964 ; Humphreys, 1979 ; Weeks, 1980), est maintenant assez fréquemment formulée dans d'autres domaines de la psychologie, par exemple celui de la personnalité (Lorr et De Long, 1984 ; Marsh, 1985 ; Marsh et Hocevar, 1985). Elle permet de concilier des conceptions et des constatations qui, considérées isolément, paraissent contradictoires.

Il arrive en effet fréquemment qu'une dimension psychologique soit conçue comme unitaire par certains auteurs, tandis que d'autres contestent cette unité, chacun étant en mesure de présenter certains résultats favorables à sa thèse. On trouvera de nombreux exemples de dimensions pour lesquelles la question peut être posée dans la revue de question que Reuchlin (1984) consacre aux aspects différentiels de la psychologie sociale expérimentale.

Or des résultats apparemment contradictoires concernant l'unité d'une dimension psychologique peuvent souvent être intégrés en une conception d'ensemble à condition de faire intervenir la notion de niveau d'observation et d'analyse. L'unité constatée à un certain niveau s'accompagne d'une diversification à un niveau plus élémentaire, ou, si l'on préfère, comporte plusieurs aspects plus limités qui ont cependant quelque chose en commun. Les modèles hiérarchiques d'analyse factorielle (conseillés par Reuchlin dans la conclusion de son

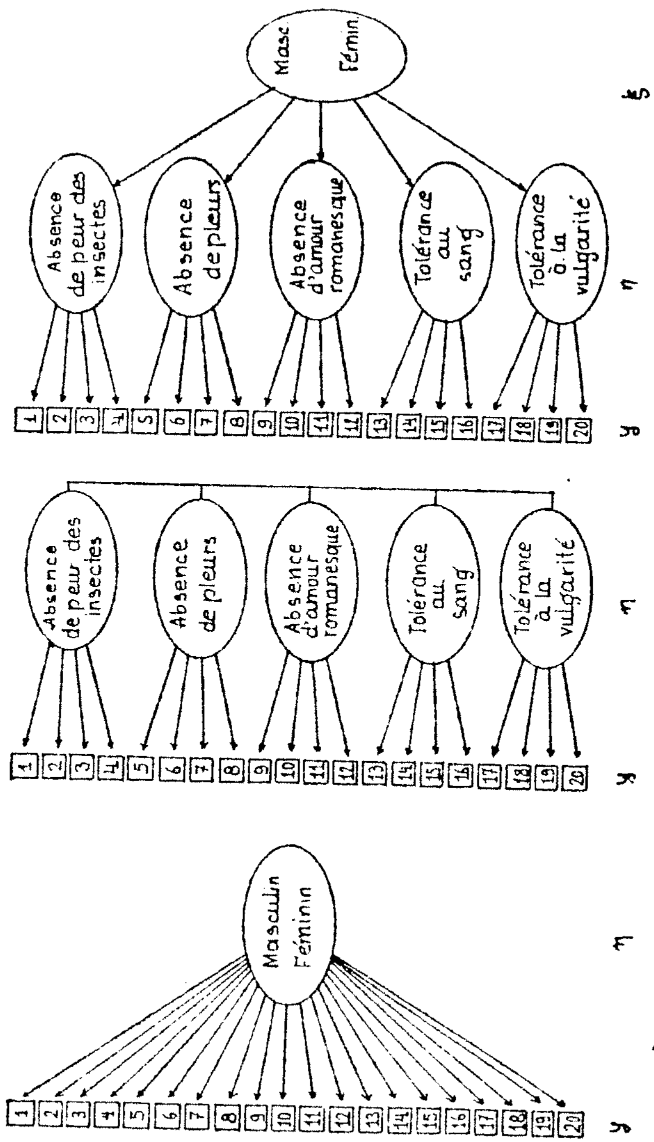

Fig. 2. — Graphes de différents modèles proposés par Marsh (1985)
Analyse factorielle confirmatoire de la masculinité-féminité
Les facteurs uniques n'ont pas été représentés

(Path diagrams of different models proposed by Marsh (1985)
Confirmatory factor analysis of masculinity-feminity
Unique factors are not represented)

article) permettent de traduire cette double réalité sous la forme suivante : un facteur général représentera ce qui est commun à l'ensemble des aspects et, par suite, à l'ensemble des variables considérées ; des facteurs de groupe représenteront ce qui est commun à chacun des sous-groupes de variables qu'on a distingués et le différencie des autres. L'articulation entre les deux niveaux est explicite et l'on peut, en particulier, apprécier leur importance relative en termes de parts de variance dont rend compte chaque catégorie de facteurs.

L'exemple que nous prendrons a trait à la dimension masculinité-féminité. Marsh (1985) éprouve, par analyse factorielle confirmatoire, une série de modèles relatifs à la structure de l'échelle masculinité-féminité des Echelles de Personnalité de Comrey (1970) appliquée à 366 hommes et 384 femmes. Cette échelle comporte 20 item destinés à couvrir 5 aspects de la masculinité-féminité : absence de crainte des insectes ; absence de pleurs, absence d'amour romanesque, tolérance au sang, tolérance à la vulgarité correspondent au pôle masculin des différents aspects retenus ; 4 item mesurent chaque aspect. Parmi les modèles comparés figurent un modèle comportant 1 seul facteur bipolaire masculinité-féminité (modèle 1 de Marsh) ; un modèle comportant 5 facteurs bipolaires correspondant chacun à un des aspects retenus lors de la construction de l'échelle, ces facteurs étant en covariation (modèle 3 de Marsh) ; un modèle comportant 1 facteur général bipolaire masculinité-féminité de second ordre et 5 facteurs bipolaires de premier ordre correspondant aux différents aspects, le facteur de second ordre rendant compte des covariations entre les facteurs de premier ordre (modèle 4 de Marsh). La figure 2 fournit les graphes correspondant à ces différents modèles.

Techniquement, pour effectuer une analyse factorielle confirmatoire de second ordre, Jöreskog et Sörbom proposent de considérer que les variables observées sont des variables y résultant de l'effet de facteurs communs de 1[er] ordre η et de facteurs uniques de 1[er] ordre ε ; les facteurs de 2[e] ordre sont considérés comme des variables ξ influençant les facteurs de 1[er] ordre. Les ζ représentent les facteurs uniques de 2[e] ordre. Il n'y a pas d'influence des η sur es η : $\mathbf{B} = \mathbf{O}$. Le modèle général est :

$$\eta = \Gamma\xi + \zeta$$
$$y = \Lambda_y \eta + \epsilon.$$

Les paramètres à estimer figurent dans les matrices Λ_y, Γ, Φ, Ψ et Θ^ε. Les covariances des facteurs uniques de 1[er] et de 2[e] ordre sont généralement posées égales à 0 (matrices Θ^ε et Ψ diagonales).

La valeur de l'ajustement des différents modèles est appréciée par Marsh à l'aide de χ^2 et à l'aide de différents indices dont celui de Bentler et Bonett (appelé BBI)[6]. Nous avons fait figurer ces indications dans le tableau IV, ainsi que ceux relatifs au « modèle nul ». On constate que l'ajustement n'est pas bon, et guère amélioré par rapport au modèle nul, pour le 1[er] modèle. Le 3[e] et le 4[e] modèle sont beaucoup plus satisfaisants. Les données sont compatibles

6. Signalons que Marsh fixe la métrique des variables latentes en posant certains λ égaux à 1. De ce fait, la variance de ces variables n'est pas égale à 1 et les solutions ne sont pas standardisées. D'autre part, bien qu'il commente les résultats détaillés, il ne les présente pas, sauf pour un des modèles.

TABLEAU IV

Valeurs de l'ajustement de différents modèles proposés par Marsh (1985)
(Fit values for different models proposed by Marsh (1985))

	χ^2	$(d.l)$	$\chi^2/d.l$	BBI
Modèle nul	4 558	(380)	11,99	0
Modèle 1 (1 seul facteur)	3 086	(340)	9,08	.323
Modèle 3 (5 facteurs en cov.)	690	(320)	2,16	.849
Modèle 4 (5 facteurs de 1er ordre, 1 facteur de 2e ordre)	724	(330)	2,19	.841

avec l'hypothèse que la masculinité-féminité est constituée de 5 dimensions en covariation (modèle 3) ou, autre façon de formaliser la même idée, d'une dimension globale se subdivisant en 5 sous-dimensions (modèle 4)[7]. L'article comporte d'autres aspects (bipolarité de la masculinité-féminité ou existence de 2 facteurs non strictement opposés, masculinité et féminité ; invariance de la structure chez les hommes et chez les femmes) que nous n'aborderons pas, passant maintenant au deuxième exemple.

Il s'agit d'une étude réalisée par Hertzog et Schaie (1986) sur la stabilité et les changements dans les différences individuelles d'intelligence chez des adultes examinés à plusieurs occasions. Cinq sous-tests de la batterie d'Aptitudes mentales primaires de Thurstone (Verbal, V ; Spatial, S ; Numérique, N ; de Raisonnement, R ; de Fluidité verbale, W) ont été appliqués 3 fois, avec des intervalles de sept ans entre deux passations, à des sujets de l'Etude longitudinale de Seattle. Nous nous limiterons à une partie de l'étude qui porte sur un échantillon de 169 sujets examinés en 1956, 1963, 1970 (les sujets, adultes, étaient d'âges variés à la 1re occasion mais avaient donc tous sept ans de plus à la 2e occasion et quatorze ans de plus à la 3e).

Les données ayant été obtenues sur les mêmes sujets à l'aide des mêmes épreuves, il est possible de se demander si les 5 sous-tests ont la même importance, à chaque occasion, comme composantes de l'intelligence (celle-ci étant chaque fois définie par un facteur général commun à la batterie), si la variabilité des résultats interindividuels change ; si le classement des sujets change, ce qui correspondrait à des différences individuelles dans l'évolution de l'intelligence avec l'âge. Le problème de la stabilité du niveau moyen d'intelligence n'est pas abordé ici.

L'analyse factorielle confirmatoire permet d'étudier ces différentes questions en spécifiant de façon appropriée un même modèle général représenté figure 3 : à chaque occasion, on fait l'hypothèse qu'un facteur général rend compte des covariations entre les 5 sous-tests. Le facteur général à une occasion n'a pas d'influence sur les sous-tests passés à une autre occasion. Chaque sous-

7. On remarquera qu'il aurait été plus intéressant de comparer aux modeles 1 et 4 un modèle à 5 facteurs orthogonaux.

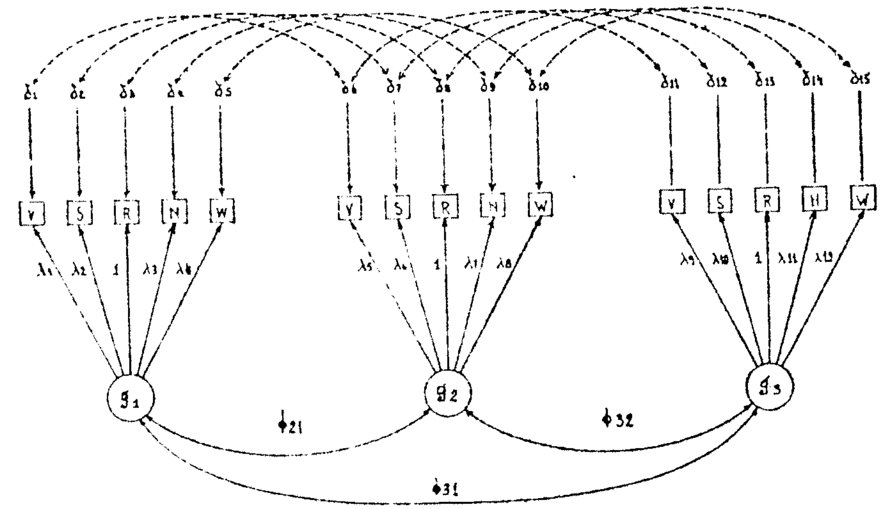

Fig. 3. — Modèle général proposé par Hertzog et Schaie (1986) pour l'étude de la structure de l'intelligence d'adultes examinés à 3 occasions. Les traits pointillés indiquent des autocovariations possibles entre facteurs uniques.

(General model proposed by Hertzog and Schaie (1986) for the study of the structure of intelligence in adults examined at 3 occasions. Dotted lines indicate possible autocovariations between unique factors.)

test dépend en outre d'un facteur unique. Pour pouvoir étudier l'évolution de la variabilité d'une occasion à la suivante (et aussi pour pouvoir introduire, comme il en sera question plus loin, des contraintes d'égalité pertinentes entre les paramètres), il faut analyser les covariances entre variables observées plutôt que les corrélations. La métrique du facteur général (variable latente) est définie, à chaque occasion, à l'aide d'une des variables observées (ici, le test de raisonnement, pour lequel le coefficient λ est posé égal à 1).

Nous présenterons seulement la façon dont les auteurs procèdent pour étudier l'hypothèse d'une importance égale, dans sa définition, des différentes composantes de l'intelligence aux différentes occasions.

Utilisant la possibilité qu'offre LISREL de contraindre des paramètres à être égaux, ils contraignent à une telle égalité les coefficients λ_1, λ_5, λ_9, qui ont trait aux relations entre le sous-test verbal et g à chaque occasion. De même, ils imposent $\lambda_2 = \lambda_6 = \lambda_{10}$; $\lambda_3 = \lambda_7 = \lambda_{11}$; $\lambda_4 = \lambda_8 = \lambda_{12}$. Un premier modèle, O_1, suppose que les facteurs uniques sont sans covariation (θ^δ diagonale). Ce modèle ne donne pas un bon ajustement (voir, un peu plus loin, tableau V). Les auteurs pensent que ce pourrait être non pas parce que la composition de l'intelligence change d'une occasion à l'autre, mais parce qu'on peut s'attendre à une covariation entre facteurs uniques ayant trait à un même sous-test d'une occasion à l'autre. Ces covariations pourraient être dues à des particularités de l'instrument (le même à chaque occasion) entraînant des erreurs de mesure communes, mais aussi à la spécificité de chaque sous-test par rapport à g. Lorsqu'on admet ces autocovariations dans la matrice θ^δ (modèle O_2), l'ajustement devient bon. Il n'est pratiquement pas amélioré si

Tableau V

Valeurs d'ajustement de différents modèles (Hertzog et Schaie, 1986)

(Goodness of fit statistics for different models (Hertzog and Schaie, 1986))

Modèle	χ^2	d.l	p	BBI	Comparaison	Δ BBI
O_1	985,84	95	.00	.574		
O_2	87,20	80	.27	.962	$O_1 - O_2$	.388
O_3	82,98	72	.17	.964	$O_2 - O_3$	.002
O_6	97,16	90	.28	.958	$O_6 - O_3$	.004

on libère les λ qui avaient été contraints précédemment (modèle O_3). Et il reste presque aussi bon si on contraint les autocovariations dans $\boldsymbol{\theta}^{\delta}$ à être égales aux 3 occasions pour chaque sous-test (modèle O_6).

Finalement, on peut accepter ce modèle O_6 dont la solution est présentée, après standardisation pour faciliter l'interprétation, au tableau VI.

On peut admettre une composition semblable de l'intelligence aux 3 occasions, à condition de faire leur place à des autocovariations, égales entre les 3 occasions, d'un même sous-test. L'examen de la matrice $\boldsymbol{\Phi}$ montre une très forte stabilité du classement des sujets en g d'une occasion à l'autre, puisque les corrélations entre g_1, g_2 et g_3 dépassent toutes .90. Une contre-validation menée sur un autre échantillon de 250 sujets confirme ces résultats.

Tableau VI

Solution standardisée pour le modèle O_6 de Hertzog et Schaie (1986)

(Rescaled solution for model O_6 of Hertzog and Schaie (1986))

	Λ_x		Φ		
			g_1	g_2	g_3
V	.838	g_1	1 000	.945	.917
S	.556	g_2		1 000	.972
R	.878	g_3			1 000
N	.518				
W	.520				

CONCLUSION

Nous ne conclurons cette première partie que très brièvement, nous réservant de présenter une discussion d'ensemble de l'intérêt et des limites du modèle LISREL à la fin de la seconde partie.

En ce qui concerne l'analyse factorielle confirmatoire, sur laquelle nous avons centré cette première partie, nous voudrions cependant faire quelques remarques.

Comme en analyse factorielle classique, et plus commodément sans doute, le chercheur peut formuler, avec ce modèle, des hypothèses relatives à l'organisation des variables observées. Ces hypothèses portent sur le nombre de facteurs, les variables qu'ils saturent, leurs éventuelles corrélations. Au lieu de tenter de se rapprocher le plus possible d'un modèle idéal par rotation, comme on peut le faire en analyse factorielle classique, on tente ici d'estimer directement les paramètres de ce modèle idéal. Comme nous l'avons souligné, le décalage éventuel entre le modèle et les données se traduit alors par des valeurs d'ajustement faibles ou des résidus élevés. Il se traduit aussi parfois par une impossibilité d'estimation, les itérations effectuées par le programme ne convergeant pas.

Sur certains points, l'emploi de LISREL présente des avantages qu'illustrent en partie les deux exemples que nous avons présentés.

Le premier est la facilité avec laquelle on peut poser et éprouver n'importe quel modèle : modèle de structure simple, modèle hiérarchique, modèle Guttmanien (simplex, circumplex), modèle en facettes, etc.

Le second est la possibilité de comparer l'ajustement de modèles différents aux données et ainsi de préciser un modèle initial incomplètement spécifié ou de choisir entre plusieurs modèles voisins, en prenant garde toutefois au fait qu'on passe souvent alors d'une démarche hypothético-déductive à une démarche inductive plus heuristique mais appelant de nouvelles vérifications.

Le troisième avantage est la facilité avec laquelle peuvent être comparées les structures factorielles d'un même ensemble de variables dans des groupes différents, problème qui se pose notamment dans les études relatives au développement ou à l'apprentissage.

Ces avantages expliquent l'usage de plus en plus fréquent de l'analyse factorielle confirmatoire ; on aura noté, cependant, qu'il faut tenir compte des différences que nous avons signalées avec l'analyse factorielle classique pour en interpréter les résultats.

BIBLIOGRAPHIE

Asher, H. B. (1983). — *Causal modeling. Second edition*, Beverly Hills, Sage Publications, Sage University Papers series on Quantitative Applications in the Social Sciences, n° 3, 96 p.

Bacher, F. (1984). — Les méthodes statistiques en psychologie différentielle : perspectives de développement, *Psychologie française*, *29*, n° 1, 9-15.

Bentler, P. M. (1980). — Multivariate analysis with latent variables : causal modeling, *Annual Review of Psychology*, *31*, 419-456.

Bentler, P. M. (1986). — Structural modeling and Psychometrika : an historical perspective on growth and achievements, *Psychometrika*, *51*, 35-51.

Bentler, P. M., Bonett, D. G. (1980). — Significance tests and goodness of fit in the analysis of covariance structures, *Psychological Bulletin*, *88*, 588-606.

Berry, W. D. (1984). — *Nonrecursive causal models*, Beverly Hills, Sage Publications in the Social Sciences, n° 37, 94 p.

Comrey, A. L. (1970). — *Manual for Comrey Personality Scales*, San Diego, Educational and Industrial Testing Service.

Hertzog, C., Schaie, K. W. (1986). — Stability and change in adult intelligence : 1. Analysis of longitudinal covariance structures, *Psychology and Aging*, *1*, 159-171.

Holzinger, K. J., Swineford, F. (1939). — A study in factor analysis : the stability of a bi-factor solution, *Supplementary Educational Monograph*, n° 48, Chicago, University of Chicago, Department of Education.

Holzinger, K. J., Harman, H. H. (1941). — *Factor analysis. A synthesis of factorial methods*, Chicago, University of Chicago Press, 417 p.
Humphreys, L. G. (1979). — The construct of general intelligence, *Intelligence*, 3, 105-120.
Jöreskog, K. G., Van Thillo, M. (1973). — *LISREL. A general computer program for estimating a linear structural equation system involving multiple indicators of unmeasured variables*, Research Report 73-5, Department of Statistics, Uppsala, Uppsala University.
Jöreskog, K. G., Sörbom, D. (1985). — *LISREL VI. Analysis of linear structural relationships by maximum likelihood, instrumental variables and least squares methods*, 2nd printing, Uppsala, University of Uppsala.
Kuiveri, H., Speed, T. P. (1982). — Structural analysis of multivariate data : a review, *Sociological Methodology*, 209-289.
Long, J. S. (1983 *a*). — *Confirmatory factor analysis*, Beverly Hills, Sage Publications, Sage University Papers series on Quantitative Applications in the Social Sciences, nº 33, 88 p.
Long, J. S. (1983 *b*). — *Covariance structure models. An introduction to LISREL*, Beverly Hills, Sage Publications, Sage University Papers series on Quantitative Applications in the Social Sciences, nº 34, 95 p.
Lorr, M., De Long, J. A. (1984). — Second-order factors defined by the ISI, *Journal of Clinical Psychology*, 40, 1378-1382.
Malinvaud, E. (1969). — *Méthodes statistiques de l'économétrie*, Paris, Dunod, 2e éd., 782 p.
Marsh, H. W. (1985). — The structure of masculinity/feminity : An application of confirmatory factor analysis to higher-order factor structures and factorial invariance, *Multivariate Behavioral Research*, 20, 427-449.
Marsh, H. W., Hocevar, D. (1985). — Application of Confirmatory factor analysis to the study of self-concept : first and higher order factor models and their invariance across groups, *Psychological Bulletin*, 97, 562-582.
Mulaik, S. A. (1987). — Toward a conception of causality applicable to experimentation and causal modeling, *Child Development*, 58, sous presse.
Reuchlin, M. (1964). — *Méthodes d'analyse factorielle à l'usage des psychologues*, Paris, PUF, 418 p.
Reuchlin, M. (1980). — Théories en psychologie : explication et interprétation psychologiques, 238-260, *in* Richelle, M., Seron, X. (sous la direction de), *L'explication psychologique*, Paris, PUF, 268 p.
Reuchlin, M. (1984). — Psychologie différentielle et psychologie sociale expérimentale, *Année psychologique*, 84, 267-295, 411-432.
Van de Geer, J. P. (1971). — *Introduction to multivariate analysis for the social sciences*, San Francisco, Freeman & Co., 293 p.
Weeks, D. G. (1980). — A second-order longitudinal model of ability structure, *Multivariate Behavioral Research*, 15, 353-365.

RÉSUMÉ

Un modèle structural de plus en plus utilisé en psychologie, LISREL, a été présenté. Dans cette première partie, on a indiqué ses caractéristiques principales et donné quelques exemples récents d'analyse factorielle confirmatoire, application du modèle à l'épreuve d'hypothèses relatives à la structure d'un ensemble de variables interdépendantes. Une deuxième partie sera consacrée à l'application du modèle à l'étude des relations causales hypothétiques entre des ensembles de variables dont certaines sont considérées comme indépendantes et d'autres comme dépendantes.

(Mots clés : *Analyse factorielle confirmatoire, Modèles structuraux, LISREL.*)

ANNEXE

Vecteurs de variables et matrices de coefficients	Dimension	Moyenne	Matrices de covariances	Dimension des matrices de covariances	Description
η	$m \times 1$	0	$\mathrm{Cov}\,\eta = (\eta\eta')$	$m \times m$	var. lat. endogènes
ξ	$n \times 1$	0	$\boldsymbol{\Phi} = \mathrm{E}(\xi\xi')$	$n \times n$	var. lat. exogènes
ζ	$m \times 1$	0	$\psi = \mathrm{E}(\zeta\zeta')$	$m \times m$	erreurs dans les équations
$\mathbf{B}$	$m \times m$				effets directs des η sur les η
$\boldsymbol{\Gamma}$	$m \times n$				effets directs des ξ sur les η
y	$p \times 1$	0	$\mathbf{S}_{yy} = \mathrm{E}(yy')$	$p \times p$	var. endog. observées
Λ_y	$p \times m$				coef. régress. des y sur les η
ϵ	$p \times 1$	0	$\theta^{\epsilon} = \mathrm{E}(\epsilon\epsilon')$	$p \times p$	erreurs de mesure des y
x	$q \times 1$	0	$\mathbf{S}_{xx} = \mathrm{E}(xx')$	$q \times q$	var. exog. observées
Λ_x	$q \times n$				coef. régress. des x sur les ξ
δ	$q \times 1$	0	$\theta^{\delta} = \mathrm{E}(\delta\delta')$	$q \times q$	erreurs de mesure des x

Covariances

1) Entre variables observées

$$\mathbf{S} = \mathrm{E}\left[\begin{array}{c|c} yy' & yx' \\ \hline xy' & xx' \end{array}\right].$$

2) En fonction des paramètres du modèle

$$\boldsymbol{\Sigma} = \left[\begin{array}{c|c} \Lambda_y(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}(\boldsymbol{\Gamma\Phi\Gamma}'+\psi)(\mathbf{I}-\mathbf{B}')^{-1}\Lambda_y' + \theta^{\epsilon} & \Lambda_y(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\boldsymbol{\Gamma\Phi}\Lambda_x' \\ \hline \Lambda_x\boldsymbol{\Phi\Gamma}'(\mathbf{I}-\mathbf{B}')^{-1}\Lambda_y' & \Lambda_x\boldsymbol{\Phi}\Lambda_x' + \theta^{\delta} \end{array}\right].$$

Fonctions d'ajustement

Moindres carrés :

$$\mathrm{F} = \tfrac{1}{2}\, tr[(\mathbf{S}-\boldsymbol{\Sigma})^2].$$

Maximum de vraisemblances :

$$\mathrm{F} = \log|\boldsymbol{\Sigma}| + tr(\mathbf{S}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}) - \log|\mathbf{S}| - (p+q)$$

où, pour une matrice carrée $\mathbf{A}$, $|\mathbf{A}|$ est le déterminant de $\mathbf{A}$ et $tr\,\mathbf{A}$, la somme des éléments diagonaux de $\mathbf{A}$.

Indices d'ajustement

Moindres carrés :

$$\mathrm{GFI} = 1 - \frac{tr(\mathbf{S} - \hat{\boldsymbol{\Sigma}})^2}{tr\mathbf{S}^2}.$$

Maximum de vraisemblance :

$$\mathrm{GFI} = 1 - \frac{tr(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\mathbf{S} - \mathbf{I})^2}{tr(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\mathbf{S})^2}$$

$$\mathrm{AGFI} = 1 - [k(k+1)/2d]\,(1 - \mathrm{GFI})$$

$$\mathrm{RMR} = [2 \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{i} (s_{ij} - \hat{\sigma}_{ij})^2 / k(k+1)]^{1/2}$$

où $k = p + q$ est le nombre total de variables observées, d le nombre de degrés de liberté du modèle, $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ la matrice ajustée à l'aide du modèle.

Indice d'ajustement normé de Bentler et Bonett permettant de comparer l'ajustement de 2 modèles emboités M_k et M_l (rapporté à celui du modèle nul M_0)

$$\Delta_{kl} = \frac{F_k - F_l}{F_0}.$$

Résidus : $s_{ij} - \hat{\sigma}_{ij}$.

Résidus normalisés : $\dfrac{s_{ij} - \hat{\sigma}_{ij}}{(s_{ii}\,s_{jj} + s_{ij}^2)/N}$.