

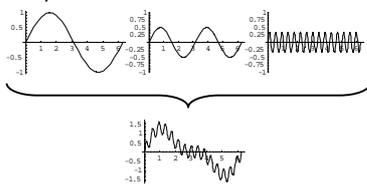


5.2 Théorème de Fourier et Transformée de Fourier

Fourier, Joseph (1768-1830)

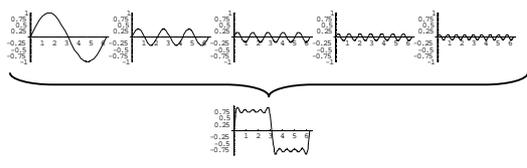
5.2 Théorème/Transformée de Fourier
a) Théorème

- Théorème « de Fourier »:
 - N'importe quelle courbe peut être décomposée en une superposition de courbes sinus
 - à la condition d'être cyclique ou limitée en étendue
- Exemple 1:



5.2 Théorème/Transformée de Fourier
a) Théorème

- Exemple 2: La fonction de marche



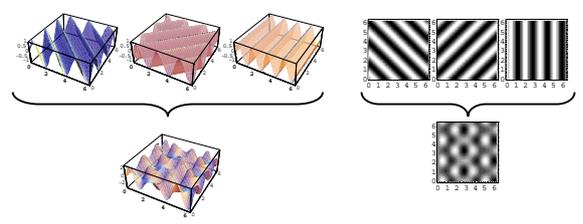
Ici, le nombre de composantes doit être infini;

- Approximation raisonnable avec 5 sinus, parfaite avec 5000 composantes:



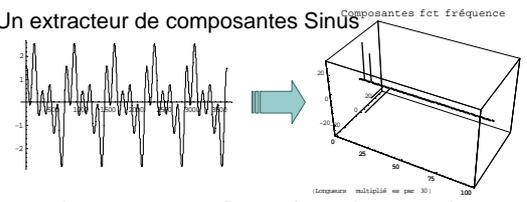
5.2 Théorème/Transformée de Fourier
a) Théorème

Exemple 3: Avec des sinus 3D



5.2 Théorème/Transformée de Fourier
b) Transformée

Un extracteur de composantes Sinus

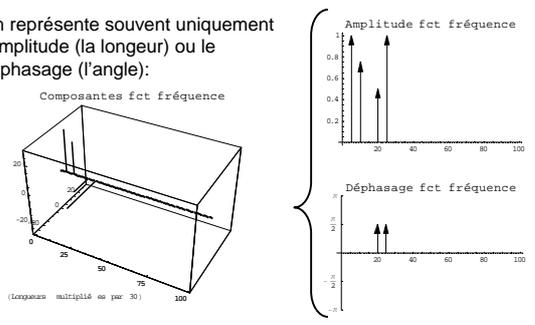


n points \rightarrow $n/2$ nombres complexes
 $\{1.5, 1, 0.5, 0, -0.25, \dots\}$ $\{0, 0, 0, 0, C, 0, 0, \dots\}$

L'ordre est important: en $i^{\text{ème}}$ position se trouve la composante de fréquence i .

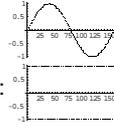
5.2 Théorème/Transformée de Fourier
b) Transformée

On représente souvent uniquement l'amplitude (la longueur) ou le déphasage (l'angle):



● ● ● | 5.2 Théorème/Transformée de Fourier
b) Transformée

● Fréquence de 1 = un cycle par image:



● Fréquence de $n/2$ = que des aller-retour:

● Série de Fourier: nombre infinie de composante sur des fonctions

● Transformée de Fourier (*Fast Fourier Transform*) $n/2$ composantes sur n données.

● ● ● |

Interlude: application pour le sommeil

● ● ● |

● Lors du sommeil, on enregistre l'électro-encéphalogramme. Les ondes les plus visibles sont utilisées pour indiquer le type de sommeil:

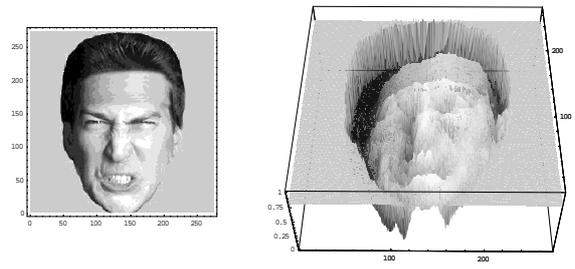
- theta: 4 à 7 Hz (i.e. cycles par seconde)
- alpha: 8-13 Hz
- beta: 14+ Hz



5.3. Conséquences pour des images

5.3. Conséquences pour des images
a) Image

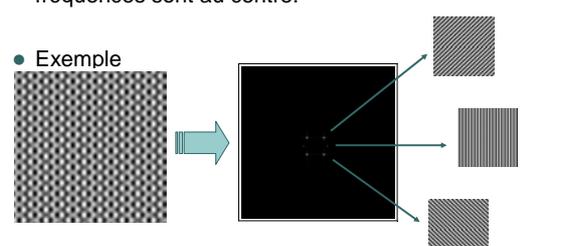
- Une image peut être vue comme des points de différentes altitudes:



5.3. Conséquences pour des images
b) Transformée

- Image $n \times n \rightarrow n \times (n/2)$ composantes sinus.
- On ne montre en général que l'amplitude. Les hautes fréquences sont au centre.

• Exemple



5.3. Conséquences pour des images
b) Transformée

- Autres exemples

5.3. Conséquences pour des images
c) Filtrage

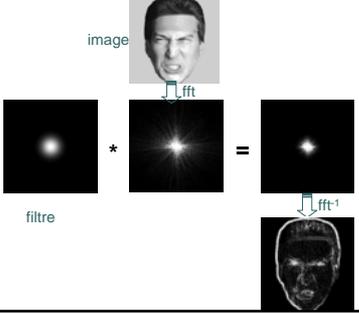
- Si on efface un point, on élimine la composante correspondante.
- En faisant la transformée inverse, on retrouve une image différente:

5.3. Conséquences pour des images
c) Filtrage

- Pour filtrer certaines fréquences, enlever un cercle

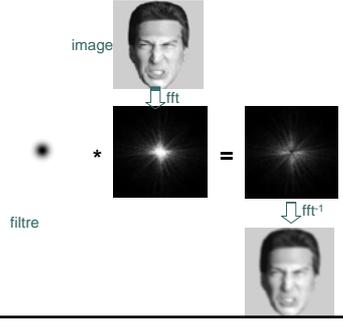
5.3. Conséquences pour des images
c) Filtrage

- Pour éviter les ridules, utiliser un filtre gaussien



5.3. Conséquences pour des images
c) Filtrage

- Exemples



5.3. Conséquences pour des images
c) Filtrage

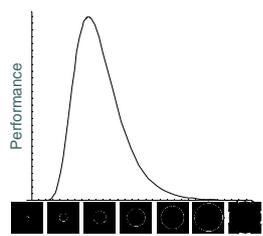




Application pour la lecture: Où est l'information utile?



Application pour la lecture: Où est l'information utile?



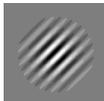
- On peut filtrer des lettres en enlevant les hautes et les basses fréquences, ne laissant qu'une « bande » de fréquence intermédiaire, et examiner la performance (le pourcentage d'identification réussie, par exemple).



Plausibilité psychologique:
Le cerveau extrait-il des fréquences et des orientations?

● ● ● L'expérience de Hubel et Weisel et les taches de Gabor

$$e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} * \sin\left[\pi\left(\frac{x}{\lambda} \cos\left[\frac{\pi}{4}\right] + \frac{y}{\lambda} \sin\left[\frac{\pi}{4}\right]\right)\right]$$

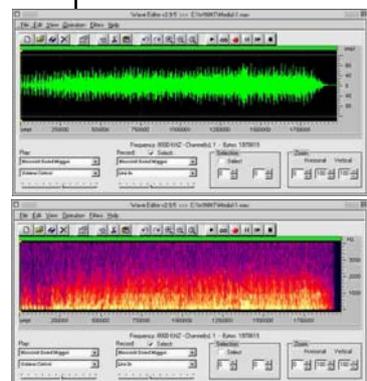
i.e. 

- Une tache de Gabor est l'incarnation d'une orientation sans aucune substance.
- Les cellules réceptrices ont une portée limitée (l'enveloppe gaussienne) et une orientation préférée (une sinus).

● ● ●

5.4 Application pour des sons

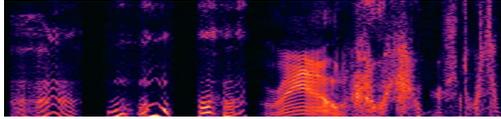
● ● ● 5.4 Application pour des sons



- Un son est une suite d'oscillation à très haute fréquence (entre 300 et 4000 Hz)
 - 300 Hz: basse
 - 1000 Hz: aigue
- Le son est découpé en petite séquence de 0.1 sec (?) et pour chaque séquence, une transformée de Fourier est exécutée.

● ● ● | 5.4 Application pour des sons

- Exemple de voix humaine:



● ● ● |

Plausibilité psychologique:
Le cerveau extrait-il des fréquences et des phases des sons?

● ● ● | La structure de l'organe de perception des sons

- La forme de l'oreille interne est un cornet (escargot). Ainsi,
 - les grandes longueurs d'ondes (basses fréquences) frappent l'entrée du cornet mais ne vont pas plus loin
 - les petites longueurs d'ondes (hautes fréquences) rentrent dans la cochléa et vont activer les récepteurs situé loin de l'entrée.

