Psy1004 – Section 6: Tableaux de contingences et tests du χ^2

Plan du cours:

- Varia
- 6.0: Distribution χ^2
- 6.1: Test non paramétrique sur des effectifs (tableau 1-D)
- 6.2: Tests non paramétrique sur des tableaux de contingences (tableau 2-D)
- 6.3: test paramétrique sur la variance σ^2
- 6.4: Postulats exactes vs. postulats asymptotiques.

Disponible sur: http://mapageweb.umontreal.ca/cousined/home/course/PSY1004

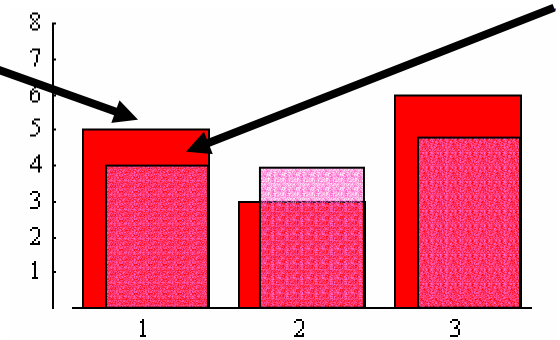
Varia

- Examen la semaine prochaine. Sont permis:
  - Une calculatrice
  - Une feuille 8½ x 5½ avec tout ce que vous voulez
- Sera fourni à l'examen:
  - Les tables statistiques des notes de cours.

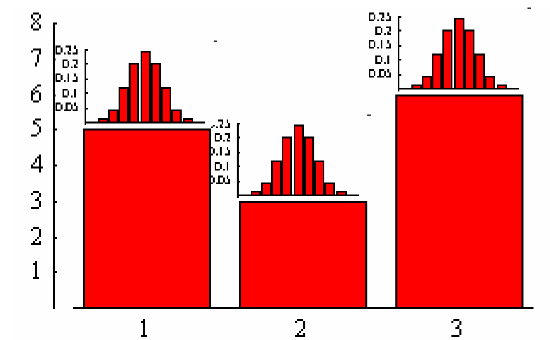
6.0: Distribution χ^2 (1/2)

- Problèmes de classification: Une classification obtenue sur un échantillon n'est pas forcément précise, due à des erreurs d'échantillonnage:

L'effectif observé dans la classe 1, O_1



L'effectif réel dans la classe 1, a_1, *inconnue.*



- Chaque élément d'une classe est une variable aléatoire avec une distribution binaire. Donc, l'effectif observé est distribué comme une binomiale. On démontre que l'approximation normale est valable, avec paramètres:

$\mathcal{N}\left(a_i, \sqrt{a_i}\right)$ où a_i est l'effectif (inconnue) réel dans la pop.

6.0: Distribution χ^2 (2/2)

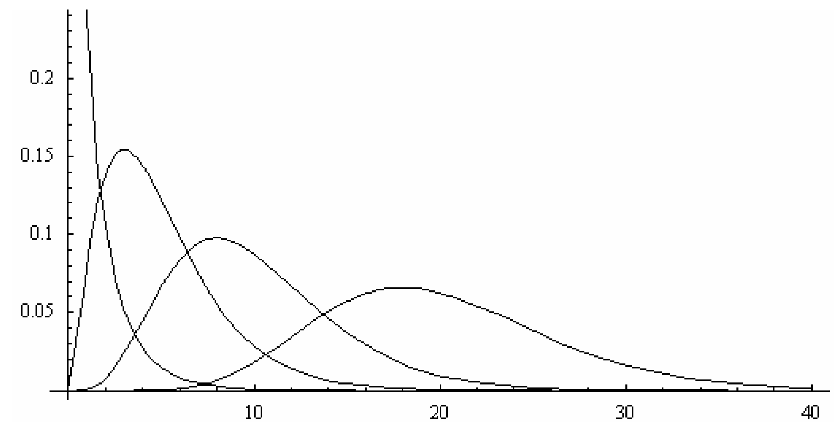
- Puisque l'on a une distribution normale, on peut transformer $\mathbf{O}_i$ en score *z* par normalisation:

$$\frac{\mathbf{O}_i - a_i}{\sqrt{a_i}}$$

- tel que le score normalisé soit $\mathcal{N}(0,1)$. Si on additionne pour chaque classe, le score normalisé, on obtient:

$$\sum_{i=1}^{NC} \frac{\mathbf{O}_i - a_i}{\sqrt{a_i}} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{NC} \left(\frac{\mathbf{O}_i - a_i}{\sqrt{a_i}} \right)^2 = \sum_{i=1}^{NC} \frac{(\mathbf{O}_i - a_i)^2}{a_i} \sim \chi^2(NC-1)$$

- Le résultat doit se distribuer comme une χ^2 (chi-carrée), selon le nombre de degré de liberté (nombre de classe NC–1).



6.1: Test non paramétrique sur des effectifs (tableau 1-D) (1/3)

- Soit une situation où l'on doit classifier des observations.
  - Par ex.: Séparer des patients d'une institution selon un niveau bas, modéré ou élevé de détresse (3 classes).
- Si la classification est binaire (telle machine brisée/machine qui fonctionne), un test binomial peut être utiliser avec comme hypothèse la proportion de machine qui sont dans une classe.
- Si la classification possède plus que deux classes, un test χ^2 doit être utilisé (ce type de test est toujours unicaudal quand le nombre de classe excède deux).
  - Par exemple, on peut avoir comme hypothèse que les cas de détresse élevée sont 2 fois moins fréquents que les cas de détresse modéré et que les cas de détresse bas (prédit donc une répartition 40% **/** 40% **/** 20%).

6.1: Test non paramétrique sur des effectifs (tableau 1-D) (2/3)

- Pour réaliser un test du χ^2, il faut établir une liste des effectifs observés **O**, et une liste des effectifs attendues *a* selon les attentes du chercheurs.
  - Par exemple, pour le cas des patients en détresse, on observe sur 250 cas une répartition (une liste ou un tableau à une dimension):

    O : 109 **/** 87 **/** 54
  - alors que selon les attentes du clinicien, on devrait avoir:

    a : 100 **/** 100 **/** 50
  - Le clinicien jauge-t-il bien la clientèle de sa clinique? Calculons:

$$\sum_{i=1}^{NC} \frac{(\mathbf{O}_i - a_i)^2}{a_i} = \frac{(109-100)^2}{100} + \frac{(87-100)^2}{100} + \frac{(54-50)^2}{50}$$

$$= 0.81 + 1.69 + 0.32 = 2.82$$

  - Pour trois groupes, ce n'est pas inattendu, puisque la moyenne est de deux (il y a deux degrés de libertés). La valeur critique pour α = 5% est de 5.991.

6.1: Test non paramétrique sur des effectifs (tableau 1-D) (3/3)

- Assez souvent, on utilise un test du χ^2 pour voir si les effectifs se répartissent également dans chaque classe.
  - Ex: les classes en psychologie. Dans un échantillon de quelques classes, on observe 35 hommes sur 158 étudiants. Y a-t-il un nombre égal d'hommes et de femmes (seuil de 5%)? (H_0: $a_{homme} = a_{femme}$)
  - Voici les données observées: **o** : 35 **/** 123 et
    attendues *a* : 79 **/** 79.
  - En calculant la somme, on obtient➔ $$\frac{(35-79)^2}{79}+\frac{(123-79)^2}{79}=49$$

    alors que la valeur critique est 3.841:
    "Le nombre d'hommes diffère significativement du nombre de femmes en psychologie ($\underline{\chi}^2(1) = 49$, $\underline{p} < .05$)."
  - Notons qu'un test binomial aurait donné la même décision (toujours) quand il n'y a que deux classes.

6.1: Test non paramétrique sur des effectifs (tableau 1-D)

- Exemple:
  - Est-ce que la répartition entre ces 5 classes est égale?
    - H_0: $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5$, H_1: $a_i \neq a_j$ pour au moins une classe
    - seuil 5%

	classe 1	**classe 2**	**classe 3**	**classe 4**	**classe 5**	***total***
*répartition observée **O***	25	18	17	22	18	*100*

- Il y a quatre degrés de liberté; la valeur critique est de _______. La répartition attendue est de ___ dans chaque classe. Faites la somme.
- Le résultat est de ________ . Concluez.

6.2: Tests non paramétrique sur des tableaux de contingences (2-D) (1/3)

- Un test sur un tableau de contingence vise à déterminer si les effectifs se répartissent en accord avec "les marges".
  - Par exemple, soit un sondage effectué auprès de 100 étudiants en psychologie pour connaître leur attitude face à la statistique. De façon générale, 20 personnes se sont montrées favorables, et 10 hommes composait l'échantillon:

	hommes	**femmes**	***total***
fav. stats			***20***
défav. stats			***80***
total	***10***	***90***	***100***

Marges

- Si ce n'est pas le cas, on parle d' "interaction".

6.2: Tests non paramétrique sur des tableaux de contingences (2-D) (2/3)

- Deux exemples de répartition:

	hommes	femmes	*total*
fav. stats	2	18	***20***
défav. stats	8	72	***80***
total	***10***	***90***	***100***

2: Multiplier la marge de droite par les pourcentages de 1:

1: calculer la marge du bas en pourcentage:
10% 90%

Ex.:
10% x 20
= 2

Répartition attendue selon l'information disponible dans les marges: Interprétation:
- 20% des gens sont favorables aux stat (peu importe le sexe);
- 10% des répondants sont des hommes.

	hommes	femmes	*total*
fav. stats	9	11	***20***
défav. stats	1	79	***80***
total	***10***	***90***	***100***

Répartition inattendue selon les marges. <u>INTERACTION</u>.
- Chez les hommes, 90% des répondants sont favorables aux statistiques;
- Chez les femmes, 12% des répondants sont favorables.

6.2: Tests non paramétrique sur des tableaux de contingences (2-D) (3/3)

- Pour décider si une interaction est significative, il faut comparer les effectifs obtenus avec ceux prédits par les marges ➔ avec un test χ^2:

	hommes	**femmes**	***total***
fav. stats	**9** / *2*	**11** / *18*	***20***
défav. stats	**1** / *8*	**79** / *72*	***80***
total	***10***	***90***	***100***

$$\sum_{i=1}^{NC}\sum_{j=1}^{NL}\frac{\left(\mathbf{O}_{ij}-a_{ij}\right)^2}{a_{ij}}=\frac{(9-2)^2}{2}+\frac{(11-18)^2}{18}+\frac{(1-8)^2}{8}+\frac{(79-72)^2}{72}$$

$$=24.5+2.7+6.2+0.7=34.1$$

- Dans un tableau de contingence, les degrés de libertés sont de (NC – 1) x (NL – 1) soit 1 dans notre exemple (valeur critique pour α= 5% de 3.841). Conclusion: "La répartition diffère significativement en fonction du sexe ($\underline{\chi}^2(1)=34.1$, $\underline{p} < .05$). Pour les hommes, une majorité sont favorables aux statistiques alors que pour les femmes, l'inverse est vrai."

6.2: Tests non paramétrique sur des tableaux de contingences (2-D)

- Exemple:
  - Préférence pour poursuivre les études supérieur en fonction du type de discipline (sciences pures, sciences humaines, arts, et droit) et du sexe.
  - Est-ce qu'il y a une interaction?
    H_0: Aucune interaction
    H_1: interaction.

	hommes	**femmes**	***total***
sc. pures	***146***	***64***	***210***
sc. humaines	***42***	***98***	***140***
arts	***30***	***60***	***90***
droits	***22***	***18***	***40***
total	***240***	***240***	***480***

6.3: test paramétrique sur la variance σ^2 (1/2)

- Ce test permet de savoir si la variance est égale à une variance hypothétique.
- Par manipulation algébrique, on trouve un test :
  - unicaudal — Rejet de H_0 si
    $$(n-1)\frac{{}_{n-1}\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{X}}^2}{\sigma_0^2} > s^+(\alpha)$$
    unicaudal — Rejet de H_0 si
    $$(n-1)\frac{{}_{n-1}\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{X}}^2}{\sigma_0^2} < s^-(\alpha)$$
    bicaudal — Rejet de H_0 si
    $$(n-1)\frac{{}_{n-1}\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{X}}^2}{\sigma_0^2} > s^+(\alpha/2) \text{ ou } < s^-(\alpha/2)$$

dans laquelle σ_0^2 est notre hypothèse et s(α) est lue dans une table χ^2 avec n-1 dl. Si le ratio est grand, on dira que la variance s'est accrue par rapport à notre hypothèse (et vice-versa).

Ce test est basé sur le postulat que la population est exactement normale, mais le χ^2, est assez robuste… (quoiqu'il n'existe pas de théorème central limite du χ^2 à ce jour pour le démontrer).

6.3: test paramétrique sur la variance σ^2 (2/2)

- Exemple:
  - Soit un échantillon **X** contenant 100 observation ayant eu lieu après un événement déclencheur. L'échantillon a une moyenne de 26.6 et un écart type non biaisé de 8.1. La théorie testée prédit que la moyenne doit être de 25 et que l'écart type doit être de 7 à cause de l'événement déclencheur.
    Est-ce que la théorie fonctionne?

    H_0: $\mu = 25$ et $\sigma = 7$
    H_1: $\mu \neq 25$ ou $\sigma \neq 7$.

  - Un test t sur la moyenne révèle que…

  - Un test sur la variance révèle que…

6.4: Postulats exactes vs. postulats asymptotiques.

- Certaines distributions sont basées sur le fait que *n* >> alors que d'autres sont basées sur une taille donnée *n*.
- Par exemple:
  - Binomial: basé sur un n précis
  - Normal: basé sur un nombre de facteur *n* >> non spécifié
  - Weibull: basé sur un nombre de compétiteurs *n* >> non spécifié

- Ces dernières sont appelées des distributions asymptotiques (i.e. quand *n*>>).
- Les distributions asymptotiques sont plus difficiles à prouver (le théorème central pris 100 ans à prouver; le cas général pour la Weibull a été publié en 2002). Ils sont cependant beaucoup plus simple (on n'a pas à connaître *n*).

6.4: Postulats exactes vs. postulats asymptotiques.

- Les postulats asymptotiques peuvent donc être utilisés pour rejeter des théories de la pensée.
- Exemple:
  - Les "réseaux connexionnistes classiques fonctionnent en simulant un grand nombre de "neurones" qui peuvent accroître ou réduire l'activation d'un neurone récepteur (qui fait bouger le doigt, par exemple).
    Ces neurones sont donc les "facteurs" affectant la réponse, ils sont en grand nombre, et à peu près autant excitateur qu'inhibiteur ➔ modèle normal.
    Cependant, quand on enregistre les temps de réponse des humains, ils ne sont jamais symétriques ➔ invalide le modèle normal, et donc, les réseaux connexionnistes.
  - Les réseaux de courses postulent plutôt que les neurones récepteur vont réagir aussitôt qu'un neurone antécédent s'active ➔ modèle de course, où le plus rapide active la réponse ➔ modèle de la Weibull qui prédit que les temps de réponse sont asymétriques.

Période de question pour l'examen