Psy1004 – Section 3:

Probabilités

Plan du cours:

- Varia
- 3.0: Probabilités: objectif
- 3.1: Qu'est-ce qu'une probabilité?
- 3.2: Comment quantifier une probabilité?
- 3.3: Exemple 1: Sexe
- 3.4: Exemple 2: Taille
- 3.5: La normale standardisée
- 3.6: Exemple 3: Course

Disponible sur: http://mapageweb.umontreal.ca/cousined/home/course/PSY1004

Varia

- ?

3.0: Probabilités: objectif

On a souvent utilisé des termes du genre:

- "a toutes les chances de..."
- "Selon toute vraisemblance, ...", etc.

Comme par exemple:

- "La moyenne d'un échantillon reflète, ***selon toute vraisemblance***, la moyenne de la population."
- "En prenant une donnée au hasard, elle a ***toute les chances*** d'être à $\pm$ un écart type de la moyenne des données."
- Etc.

Comment quantifier ces phrases?

- En utilisant une "probabilité"; ex: "Il y a près de 70% de chance que la moyenne de la population soit de 170 cm $\pm$ 1 cm (SE).
- Qu'est-ce qu'une probabilité?
- Comment quantifier une probabilité?

3.1: Qu'est-ce qu'une probabilité?(1/2) a) intuitivement

1. Une probabilité indique le nombre de fois que j'obtiens un résultat par rapport au nombre total d'essai.
   - Par exemple, sur un dé à six faces, il y a 1 chance sur 6 d'obtenir un  :

$$\frac{\textbf{nombre de résultats voulus}}{\textbf{nombre d'essais total}}$$

2. Pour avoir vraiment la probabilité exacte, il faut que le nombre total d'essai $\rightarrow \infty$ (loi des grands nombres):

sur 6 essais, $\approx$ 1 

sur 600 000 essais, $\approx$ 100 000 

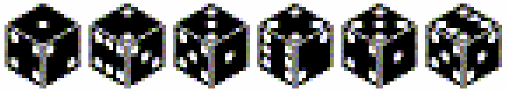
d'où le ratio

$\approx$ 1/6 entre 0% et 33%

$\approx$ 100000/600000 entre 16.666% et 16.667%

3.1: Qu'est-ce qu'une probabilité?(2/2) b) axiomatiquement

soit:

Ω l'ensemble de tous les événements {  }

$\varnothing$ l'ensemble vide

selon Kolmogorov ($\approx$1930):

$\Pr(\Omega) = 1$ {il est certain qu'un résultats va sortir}

$\Pr(\varnothing) = 0$ {il est certain que rien ne peut pas se produire}

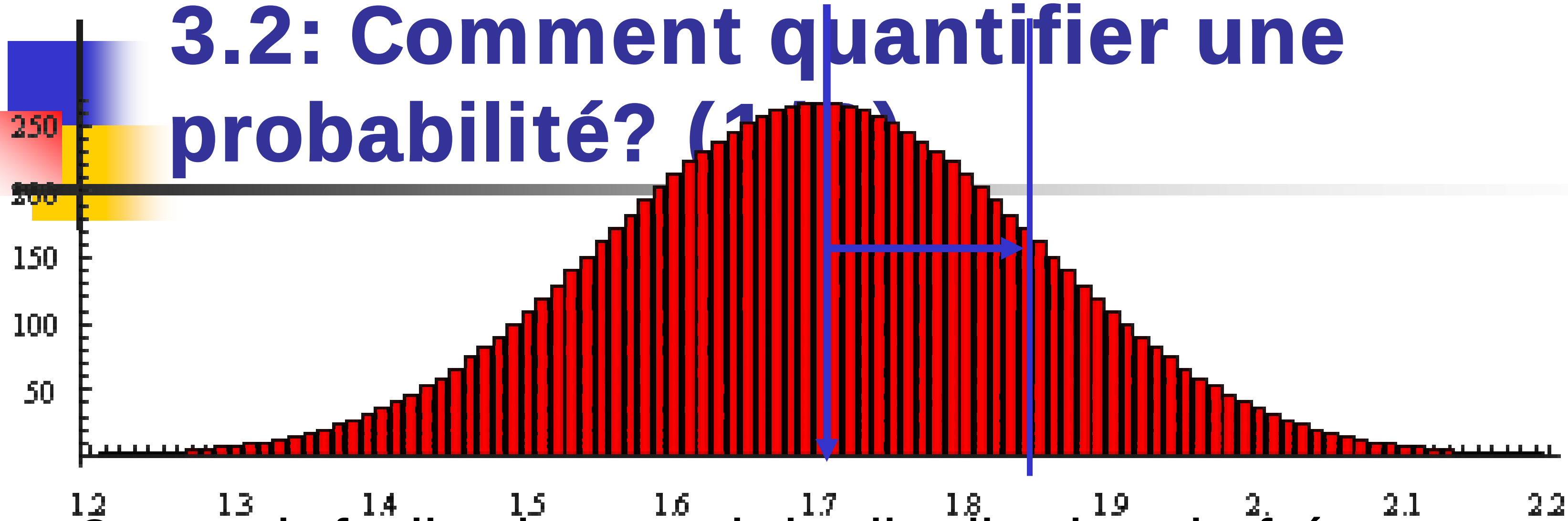
Pr(2 événements disjoints) = Pr(1er événement) +Pr(2^{ième} événement)

{additivité des probabilités}

Tout calcul qui donne des nombres entre 0 et 1 et est additif est un calcul de probabilité (ex. mécanique quantique).

De plus, il découle que Pr() = 1/6.

3.2: Comment quantifier une probabilité? (1/2)



Ce serait facile si on avait la distribution de fréquence complète de la population entière (voir ci-haut sur 10000 individus, ici moyenne = 1.70, et écart type = 15).

Par exemple:

- Quelle est la probabilité d'être plus grand que 1.85 m? ➔ Combien ont plus que 1.85 sur les 10000? 1587 et 1587/10000 = 15.9%.
- Quelle est la probabilité d'avoir entre 1.55 et 1.85 m? ➔ Combien ont plus que 1.55 et moins de 1.85? 6827, donc 68.3%

Le hic? On n'a pas cette distribution pour la population entière... (à moins de mesurer la population entière)

3.2: Comment quantifier une probabilité? (2/3)

Peut-on inférer quelle type de distribution suit la population si l'on connaît certains faits?

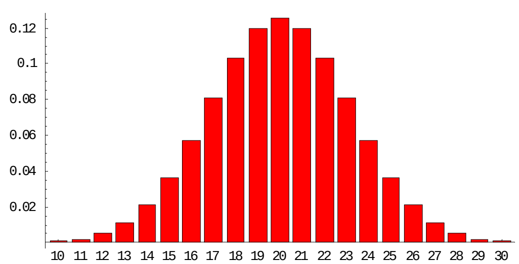
- Des faits portants sur les individus de la population, où
- Sur ce qui influence la grandeur de chacune des mesures.

Réponse: Oui.

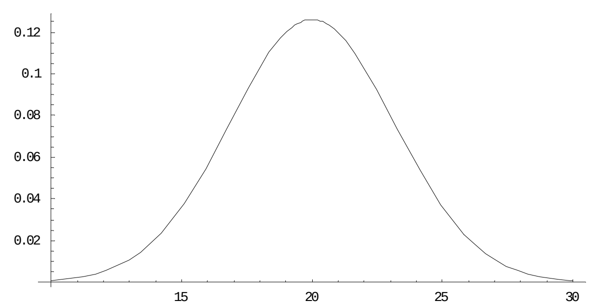
Il s'agit du travail du probabiliste d'établir le type de distribution décrivant une population à partir de quelques faits précis.

Par exemple, une population peut être:

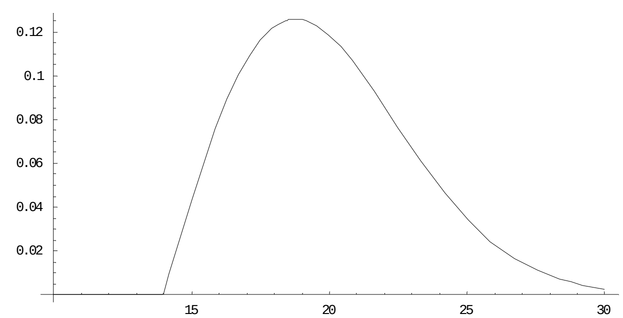
binomial:



normal:



Weibull:



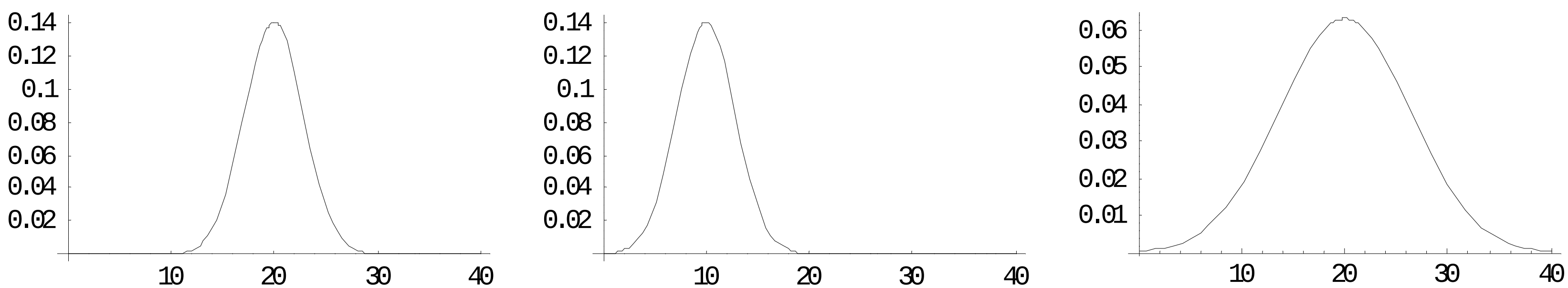
3.2: Comment quantifier une probabilité? (3/3)

Si l'on connaît le type de distribution, peut-on inférer quelles devraient être ses paramètres à partir d'un échantillon?

Réponse: Oui.

Il s'agit du travail statistique de quantifier des paramètres à partir de statistiques obtenues d'un échantillon.

Par exemple, la position d'une distribution normale sont sa position μ et son étendu σ:



Interlude

Peut-on évaluer la probabilité d'avoir:

- 0 piles sur 4 lancés d'une pièce de monnaie?
- 1 piles sur 4 lancés d'une pièce de monnaie?
- 2 piles sur 4 lancés d'une pièce de monnaie?
- 3 piles sur 4 lancés d'une pièce de monnaie?
- 4 piles sur 4 lancés d'une pièce de monnaie?

Faisons un test.

Est-ce que:

- les résultats dans la classe font du sens (cf. intuition)?
- les résultats étaient prévisibles (cf. Table 1)?

Trois distributions:

La distribution binomiale

La distribution normale

La distribution Weibull

Disponible sur: http://mapageweb.umontreal.ca/cousined/home/course/PSY1004

La distribution binomiale

Disponible sur: http://mapageweb.umontreal.ca/cousined/home/course/PSY1004

3.3: Exemple 1: Sexe (1/4)

Supposons qu'un individu sur 2 est un homme.

Si je prend un échantillon de 40 personnes, combien y aura-t-il d'homme?

Si j'en prend un second? un troisième? ... un dix millième?

Au probabiliste, on lui dit ces faits:

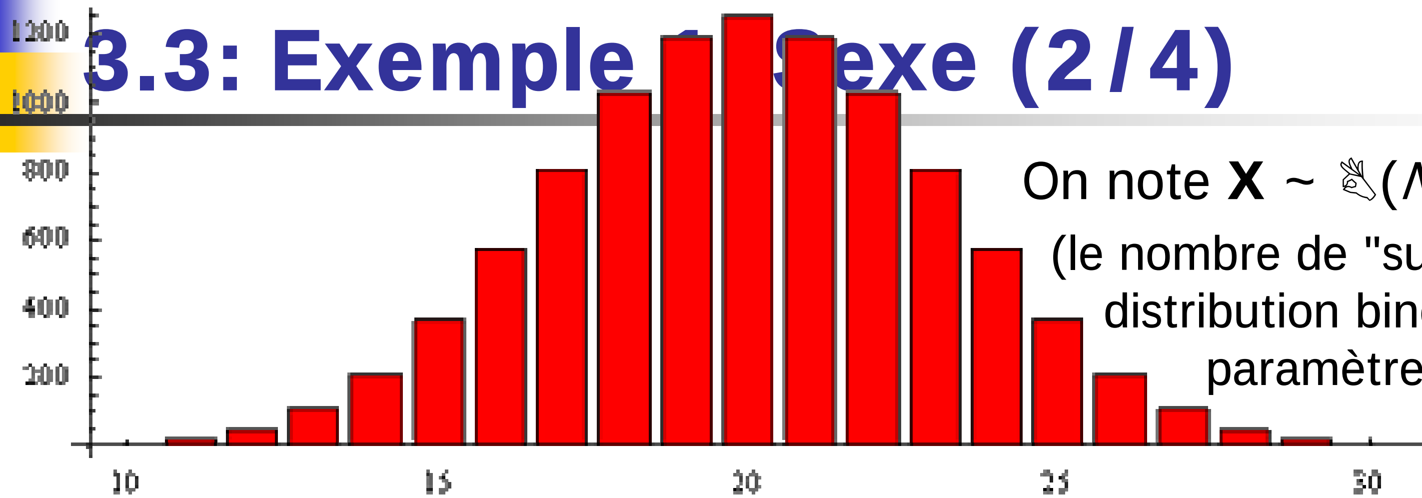
- Un individu ne peut être que homme ou femme (binaire)

C'est tout! Un postulat seulement!!!

Chaque essai est un "essai de Bernoulli" (ne peut prendre que deux valeurs, est binaire)

➔ La distribution des résultats possibles est une distribution binomiale.

3.3: Exemple 1: Sexe (2/4)



On note **X** ~ $\mathcal{B}(N, p)$

(le nombre de "succès" suit une distribution binomiale avec paramètres *N, p*)

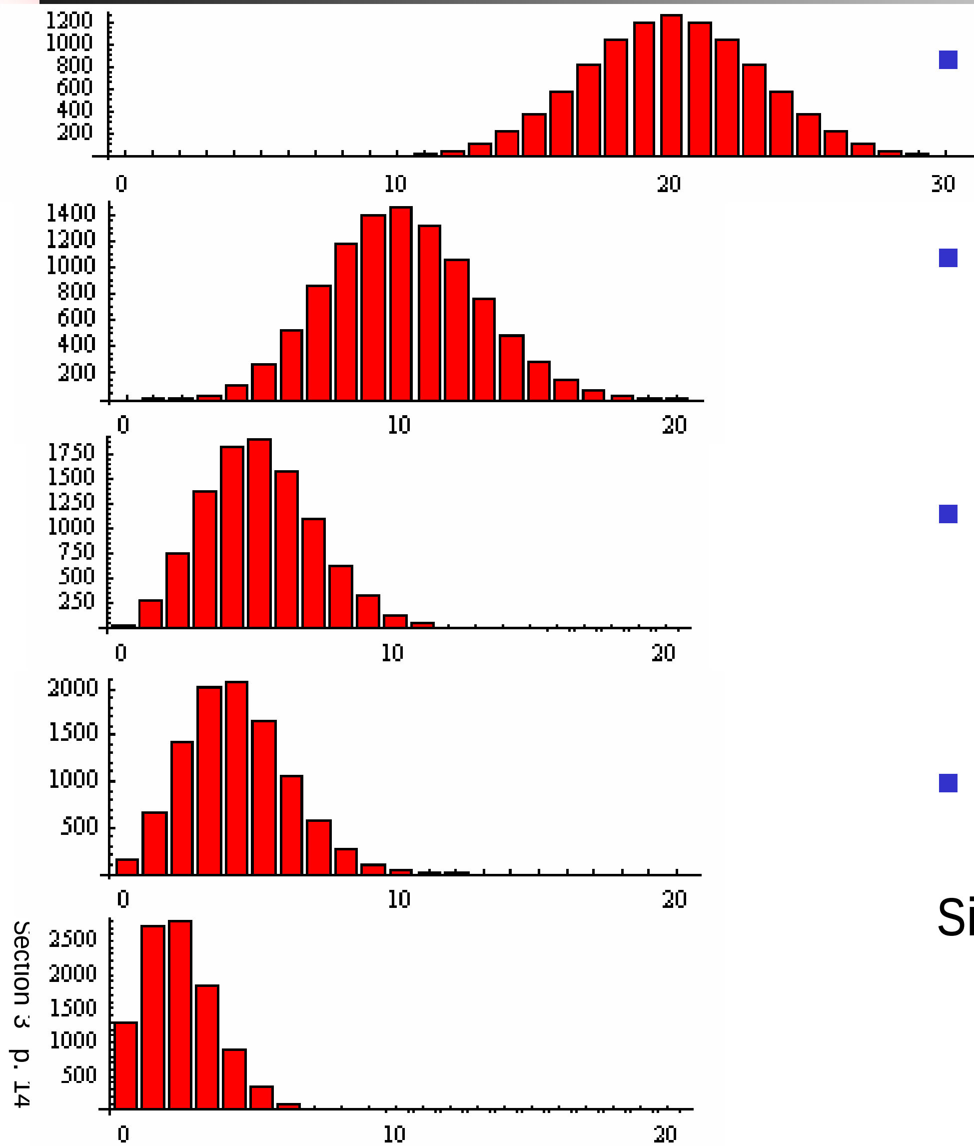
Deux paramètres sont nécessaires pour décrire la Binomiale: *N* et *p; N* est le nombre d'observation, *p* la probabilité d'un "succès".

Grâce à un argument mathématique/logique, on n'a pas besoin de faire 10 000 échantillons pour connaître les résultats possibles (échantillons virtuels).

Dans notre exemple:

- Un échantillon, en moyenne, a 20 hommes (la moitié);
- L'écart type est de ± 3 hommes.
- Il existe, sur 10 000 échantillons, 1340 ayant 24 hommes ou plus et 1340 ayant 16 hommes ou moins;
- Au total, sur 10 000 échantillons, 7318 (soit 73%) ont 20 ± 3 hommes.

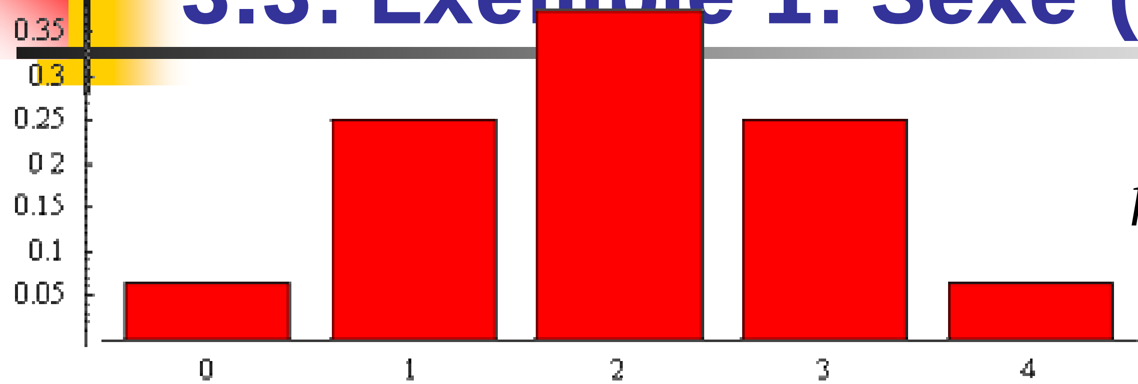
3.3: Exemple 1: Sexe (3 / 4)



- Dans l'exemple précédent, la moitié était des hommes, soit un *p* = ½ ;
- Si la population contenait, disons ¼ d'hommes, on aurait plutôt obtenu ceci:
- ou ceci pour un huitième (comme en psychologie)...
- etc. pour 1/10 et 1/20.

Si le paramètre *p* est une inconnu, il doit être inféré à partir d'un échantillon ➔ statistiques inductives.

3.3: Exemple 1: Sexe (4 / 4)



$$f_{\mathbf{X}}(r) = \binom{N}{r} p^r (1-p)^{N-r}$$

- Autre exemple d'événements binaires (essais de Bernoulli):
  - Le nombre de pile si je lance 4 fois une pièce de monnaie (ci-haut).
  - Le nombre de francophone dans une salle de 200 personnes.
- Pour calculer la probabilité d'obtenir un certain nombre d'essais "positifs"
  a. Identifier N et p (si p n'est pas connu, poser un p par hypothèse); ici, nous avons $N = 4$ et $p = ½$;
  b. Calculer la probabilité d'obtenir r succès Pr{$\mathbf{X} = r$}, donné par $f_{\mathbf{X}}(r)$:
     - en utilisant la formule ci-haute,
     - en utilisant une table statistique dans laquelle les calculs sont déjà faits par ex. la probabilité d'obtenir zéro pile sur 4 lancés est de 6.25%, la probabilité d'obtenir 0 ou 1 pile est de 31.25%, etc.

Détails

La distribution normale

Disponible sur: http://mapageweb.umontreal.ca/cousined/home/course/PSY1004

3.4: Exemple 2: Taille (1/4)

Quelle est la taille des nord américain?

Quelle est la taille moyenne? Quelle est la probabilité que la taille d'un individu soit de plus de 2.10 m? de moins de 1.40? Etc.

Quelle est la distribution des tailles????

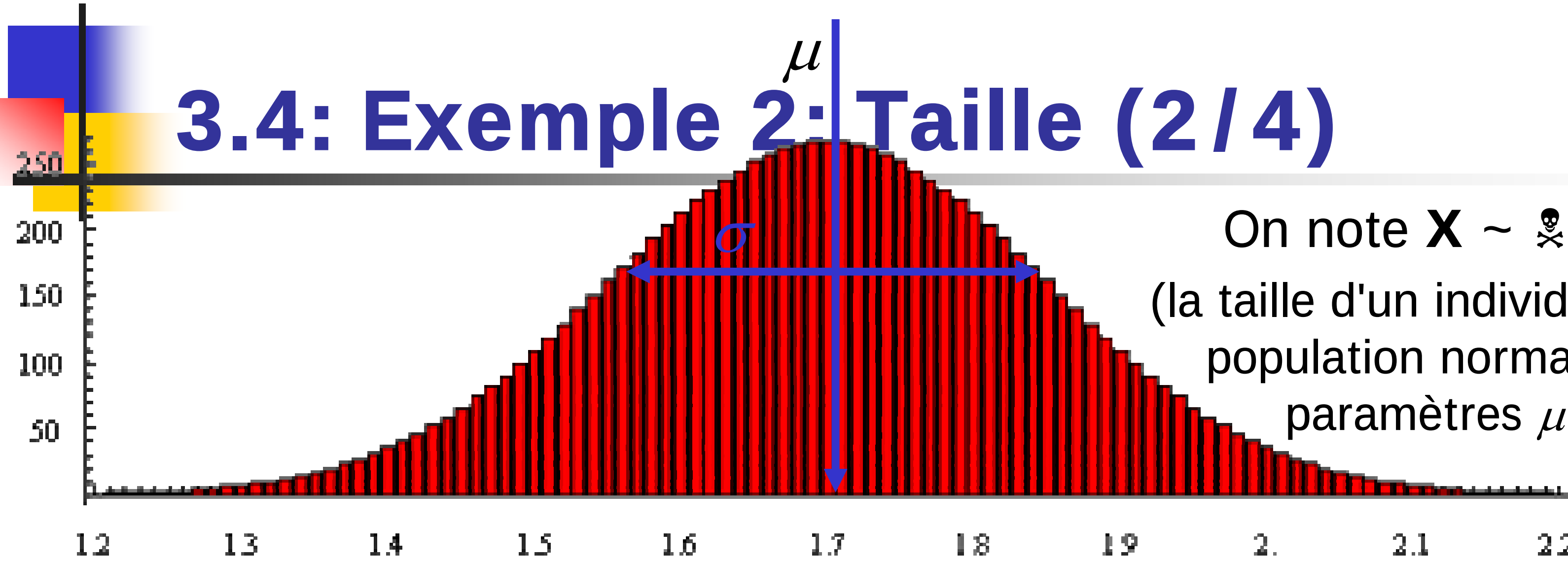
Au probabiliste, on lui dit ces faits:

- La taille est influencée par un grand nombre de facteurs (gènes, alimentation, maladies dans l'enfance, etc.)
- Certains de ces facteurs nuissent, d'autres favorisent une grande taille
- Il en existe à peu près autant de favorable que de défavorable.

C'est tout! Trois postulats seulement!!!

➔ La distribution est une distribution Normale (Gaussienne)

3.4: Exemple 2: Taille (2/4)



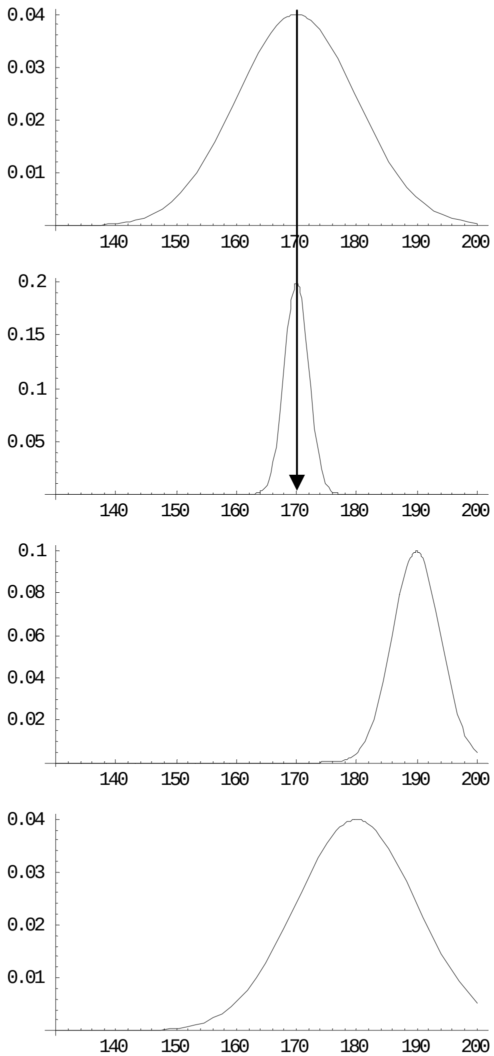
On note **X** ~ ☠(μ, σ)

(la taille d'un individu suit une population normale avec paramètres μ, σ)

Cependant, les deux paramètres décrivant une Normale (μ, σ) sont des inconnues qui doivent être inférées ➔ statistiques inductives:

- La moyenne estime bien le paramètre μ;
- L'écart type non biaisé estime le paramètre σ.

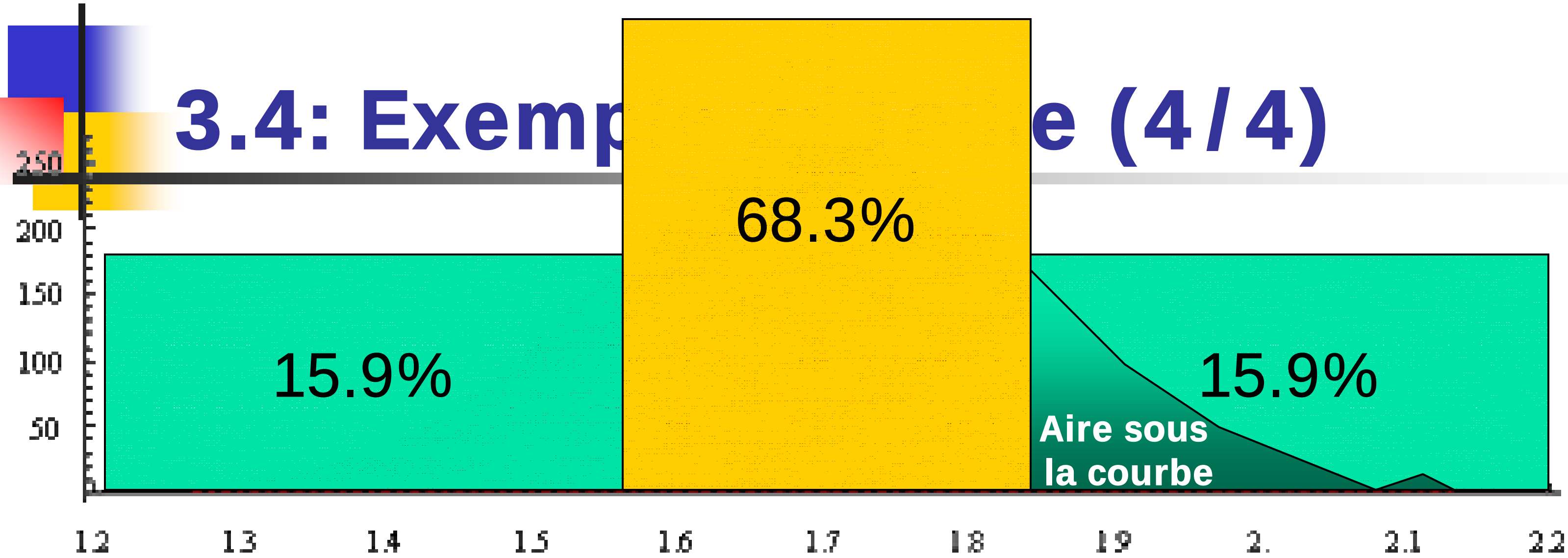
3.4: Exemple 2: Taille (3 / 4)



Autant μ que σ peut varier d'une population à une autre.

Si un ou l'autre paramètre diffère, il s'agit d'une population différente.

3.4: Exemp... e (4/4)

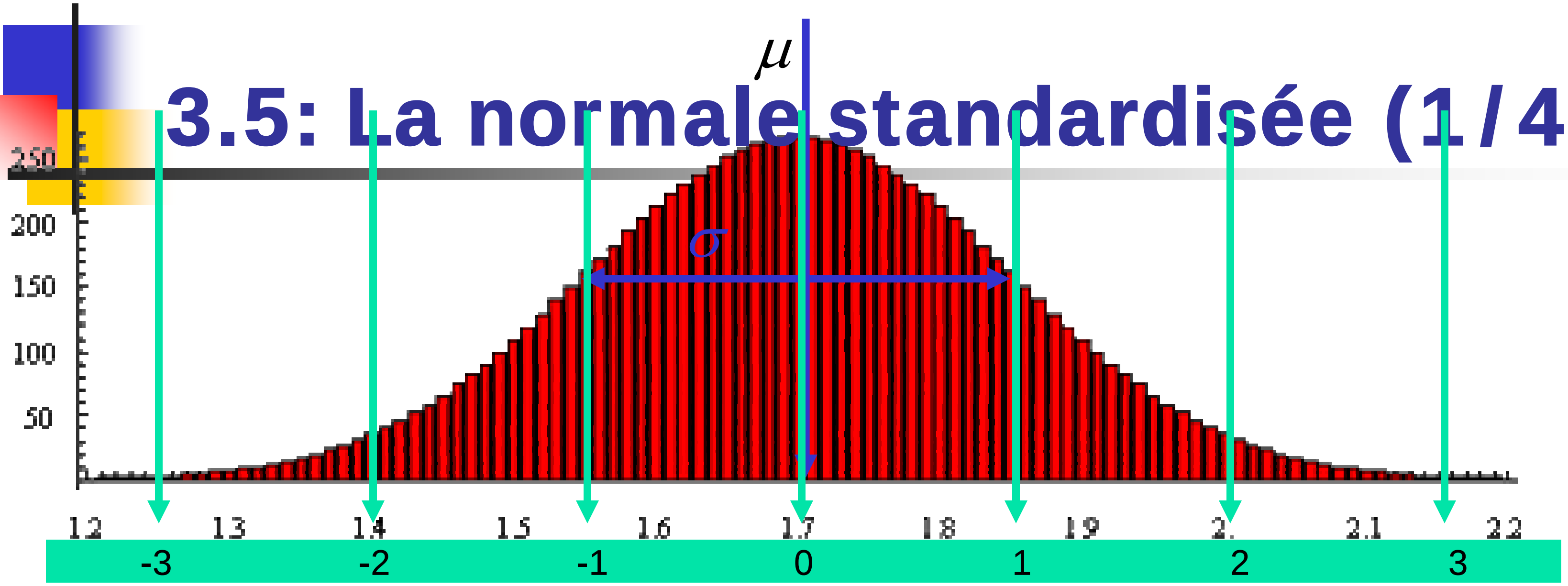


Par exemple, si μ = 1.70 m et σ = 15 cm,

- Quelle est la probabilité d'être plus grand **d'un écart type** de la moyenne ➔ Combien ont plus que 1.85 sur les 10 000? 1 587 et 1 587/10 000 = 15.9%.
- Quelle est la probabilité d'être à moins **d'un écart type** en bas de la moyenne? ➔ Combien ont moins de 1.55? 1 587, donc 15.9%
- Quelle est la probabilité d'être dans l'intervalle à plus ou moins **un écart type** de la moyenne? ➔ 100% - 15.9% - 15.9% = 68.3%

- Donc, la probabilité d'être à $\pm$ 1 écart type de la moyenne, si la population est normale, est de près de 70%

3.5: La normale standardisée (1 / 4)



Pour situer une donnée, on peut utiliser l'échelle d'un écart type plutôt que d'utiliser l'échelle originale,

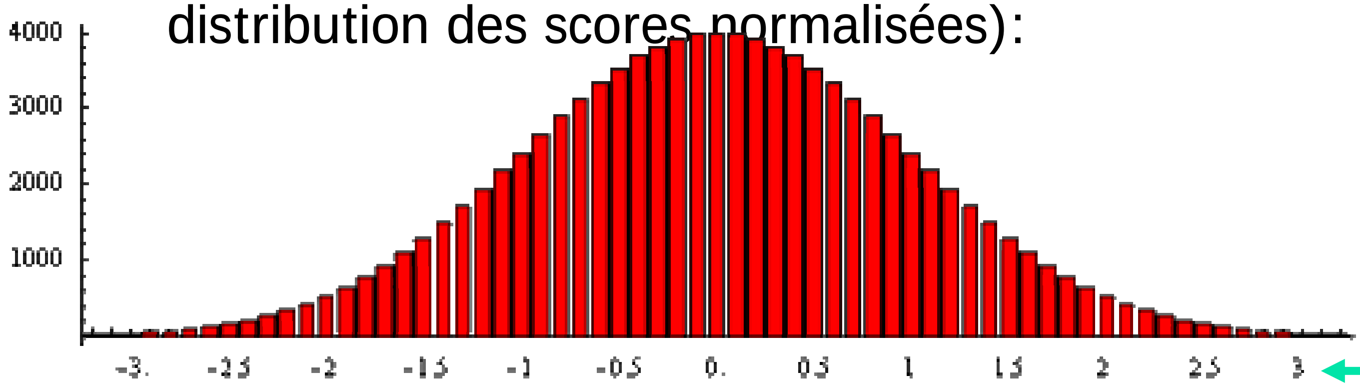
Une donnée peut être située à +1 écart type (soit 1.85 m ci-haut), à –2 écarts types (soit 1.40 m), ou toute fraction d'écart type (par ex. être à +1 1/3 écart type, soit 1.90 m).

Pour normaliser un score, utilisez la formule: $\mathbf{X}' = \frac{\mathbf{X} - \mu}{\sigma}$ dans laquelle σ et μ sont les paramètres de la population, s'ils sont connus, ou alors

Utiliser la formule suivante, équivalente: $\mathbf{X}' = \frac{\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}}}{{}_{n-1}\overleftrightarrow{\mathbf{X}}}$

3.5: La normale standardisée (2/4)

Si on normalise la totalité des scores avant de faire un graphique des fréquences, on obtient la distribution normalisée des scores (ou la distribution des scores normalisées):



Il s'agit de la même distribution, seulement l'échelle change.

Comme on le voit, il est excessivement improbable d'être à plus de 3 écarts types de la moyenne.

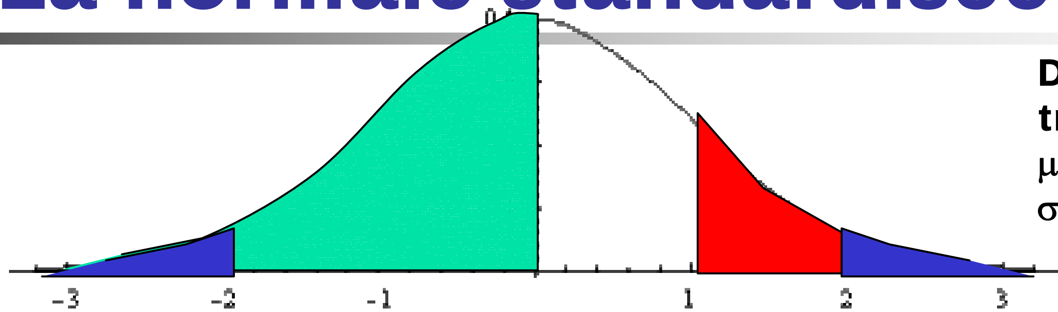
Toutes distributions de scores peuvent être normalisées en **X**' ~ ☠(0,1); avantage:

a) plus facile à calculer Pr{**X**' = z}, donné par $f_X(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z)^2}$

b) ou à trouver à l'aide d'une seule table de valeurs

Détails

3.5: La normale standardisée (3 / 4)



Distribution des scores transformés, où μ = 1.70 m et σ = 15 cm.

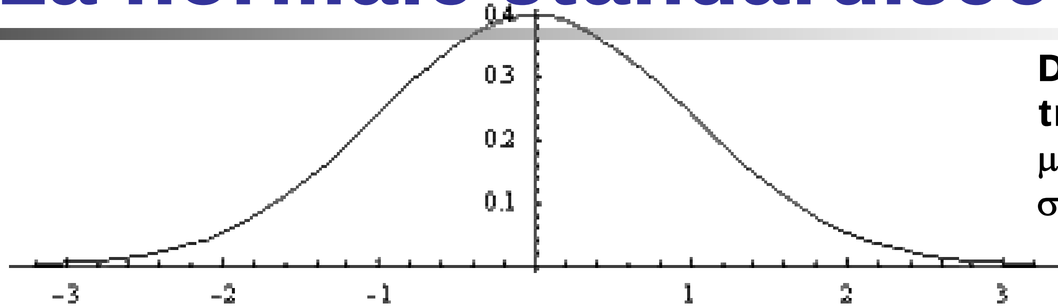
Par exemple:

- Quelle est la probabilité d'avoir pile 1.70 m? (être sur le zéro)
- Quelle est la probabilité d'avoir 1.70 m ou moins?
- Quelle est la probabilité d'avoir 1.85 m ou plus? (1 écart type)
- Quelle est la probabilité d'avoir plus de 2 m ou moins de 1.40 m? ($\pm$ 2 écarts types)

Avec une table normale standardisée, il est facile de lire ces résultats (qui sont bons si la population est belle et bien normale):

- Zéro
- 50%
- 15.9%
- 2.3% + 2.3% = 4.6%

3.5: La normale standardisée (4 / 4)



Distribution des scores transformés, où μ = 1.70 m et σ = 15 cm.

Autres exemples:

a. Quelle est la probabilité d'avoir entre 1.80 et 1.90 m?
b. D'avoir moins de 2.30 m?
c. D'avoir moins de 1.60 m?
d. D'être à plus d'un écart type de la moyenne?
e. D'être à plus ou moins 15 cm de la moyenne?

Réponses:

a. 16.1%
b. 99.997%
c. 25.2%
d. 15.9%
e. 68.3%

La distribution Weibull

Disponible sur: http://mapageweb.umontreal.ca/cousined/home/course/PSY1004

3.6: Exemple 3: Course (1/2)

Quelle est le temps d'un médaillé d'or dans une compétition de calibre international au 100 m?

Quelle est le temps moyen? Quelle est la probabilité que le gagnant finisse en moins de 10 sec? En moins de 9.5 sec? Etc.

Quelle est la distribution des temps????

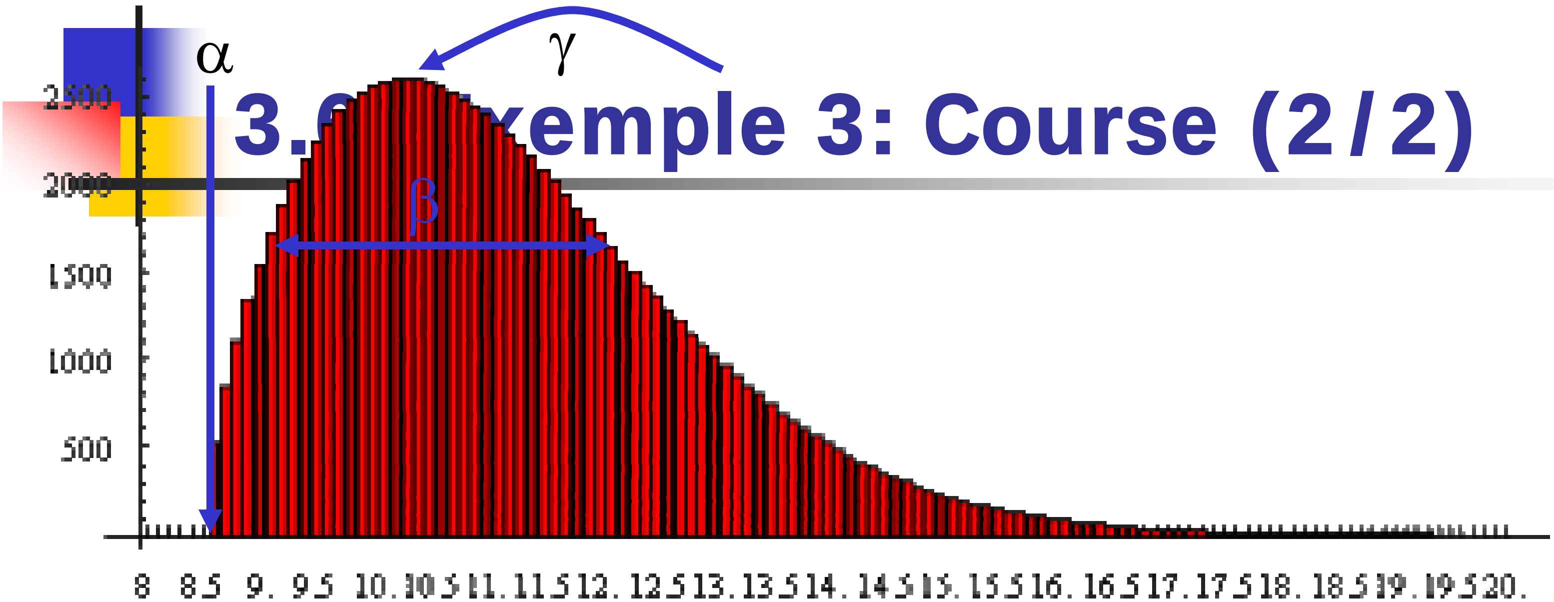
Au probabiliste, on lui dit ces faits:

- Il existe une limite inférieur pour parcourir le 100m;
- On ne veut savoir que le plus rapide, le gagnant de la course
- Un grand nombre de coureurs participent à cette course.

C'est tout! Trois postulats seulement!!!

➔ La distribution des valeurs est une distribution de Weibull

3.[illegible] Exemple 3: Course (2/2)



Cependant, les trois paramètres décrivant une Weibull (α, β, γ) sont des inconnues qui doivent être inférées ➔ statistiques inductives.

Dans le cas d'un échantillon,

On note **X** ~ W(α, β, γ)

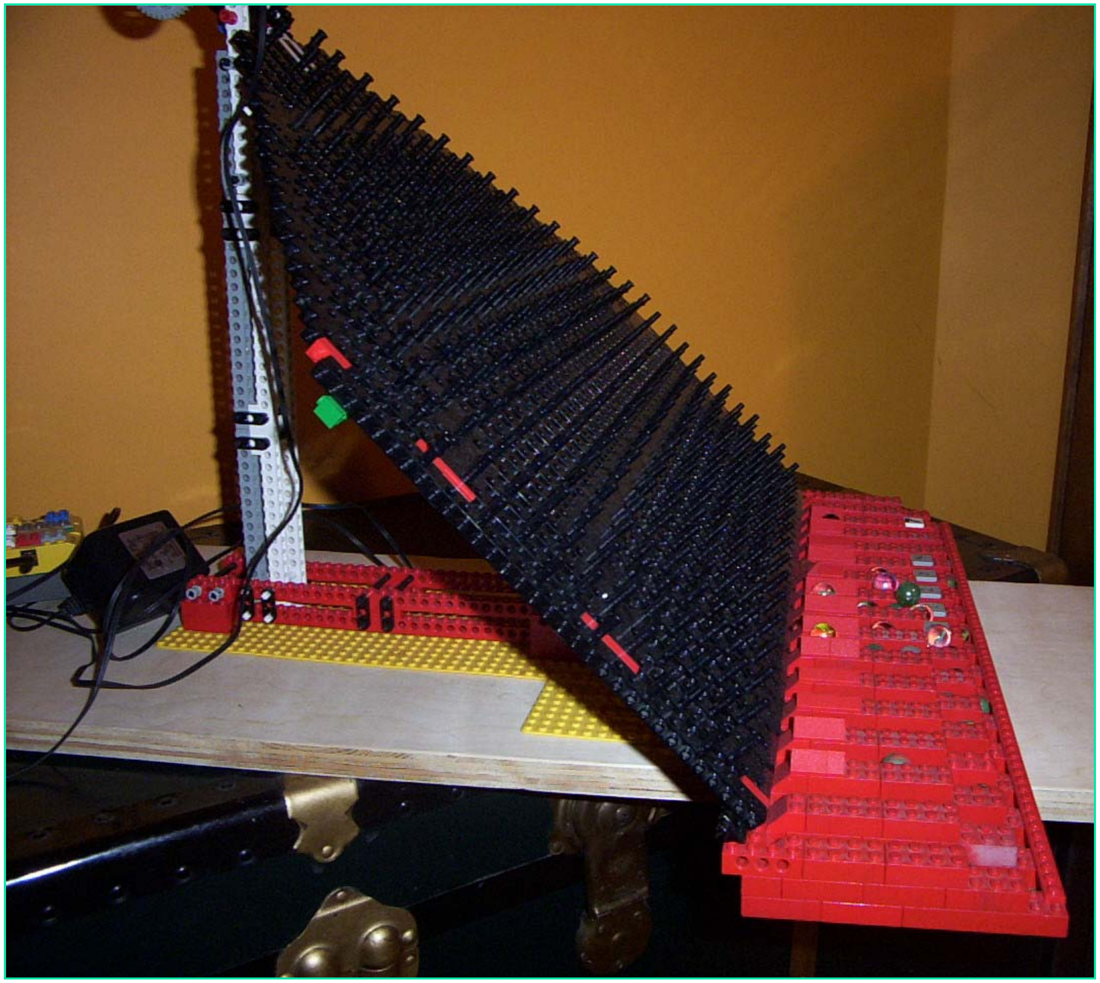
Un exemple

Disponible sur: http://mapageweb.umontreal.ca/cousined/home/course/PSY1004

Imaginez...

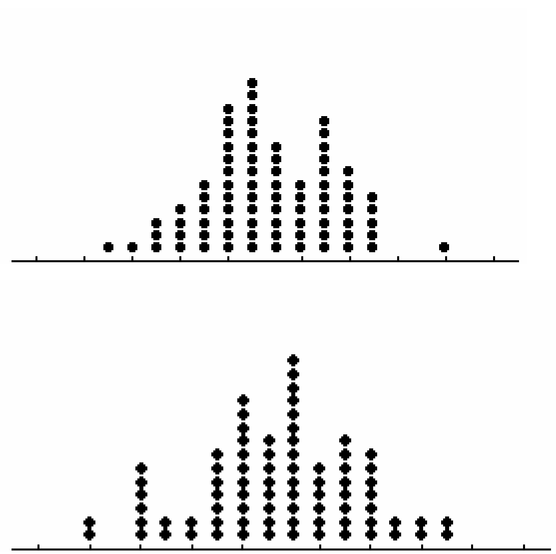
- Une planche inclinée à 45 degrés, avec plein de clous.
- Que se passe-t-il si une bille descend le long de la pente?

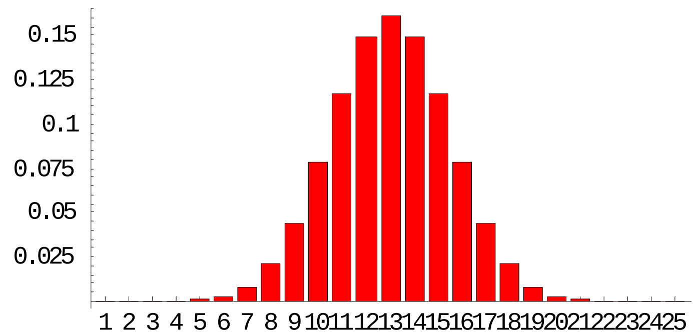
Imaginez...



Imaginez...

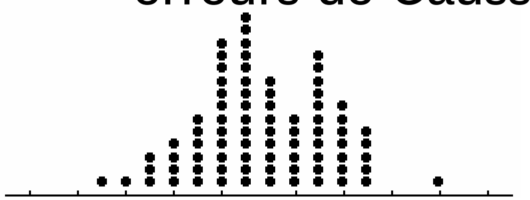
- La bille peut être déviée à droite (succès) ou à gauche (échec) avec une probabilité de 50%;
- Le nombre de clou frappé est le nombre de rangée (25 ici);
- La position finale de la bille est donc le résultat de 25 chocs (essais). Si la bille subit 25 échec, elle se retrouvera complètement à gauche. Avec 25 succès, elle sera complètement à droite.
- On prédit donc que la façon dont les billes vont se disperser est une distribution binomiale 👌(25, ½):

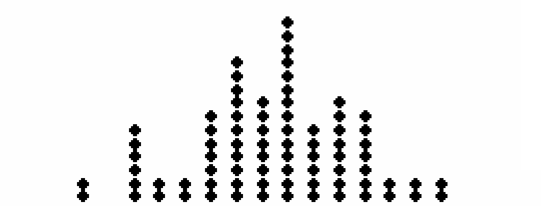


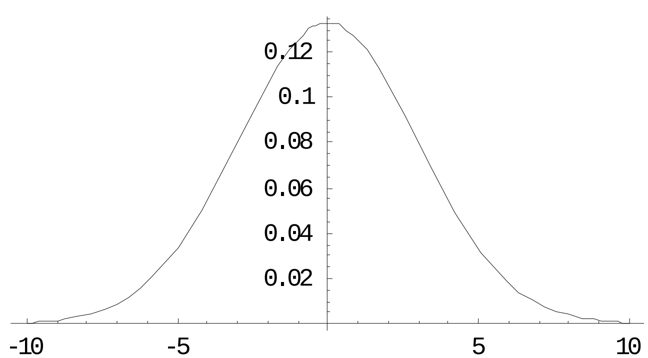


Imaginez...

- MAIS! On peut aussi imaginer:
  - La bille peut être déviée à droite ou à gauche 50%/50% du temps;
  - Le nombre de clou frappé est grand
  - La position finale de la bille est donc le résultat d'un grand nombre de « facteurs » (clous) qui favorise un petit (à gauche) ou grand (à droite) score.
  - On prédit donc que la façon dont les billes vont se disperser ressemble à une distribution normale (grâce à la théorie des erreurs de Gauss).







Imaginez...

- Ce n’est pas très précis, essayons plus de billes...