
Annexe 3 : La lecture d'une table statistique

0.0. *Survol de ce document*

L'objectif de ce document est d'indiquer comment lire les valeurs tabulées dans les Tables 1 à 5 du cours. Chacune de ces tables présentes le même type d'information, mais toutes sous des formats différents. De plus, certaines tables sont disponibles pour plusieurs seuils de décision α alors que d'autres ne sont disponibles que pour un seul seuil. À la fin de chaque section, plusieurs exemples résolus sont présents.

Dans ce qui suit, on utilise le mot "événement" dans un sens très large comme étant le résultat d'une observation, le constat d'une situation ou encore pour dénoter une valeur possible. Deux principes vont revenir souvent dans la suite.

a. La probabilité de l'événement inverse

Lorsque l'on connaît la probabilité qu'un événement se produise, on connaît immédiatement la probabilité que l'événement ne se produise pas. Dans un monde idéal, soit un événement a lieu, soit il n'a pas lieu. Il n'y a pas d'entre deux. Par exemple, un chandail est bleu ou il n'est pas bleu. Une équipe gagne un match ou ne gagne pas le match. Puisque la probabilité qu'il y ait quelque chose doit totaliser 100%, il s'ensuit que la probabilité de l'événement et de l'événement inverse doit totaliser 100%. Par exemple, si la probabilité que je porte du vert aujourd'hui est de 80%, il reste une probabilité de 20% que je ne porte pas du vert aujourd'hui. Si je connais une probabilité (disons $x\%$), je peux calculer l'autre avec la formule $100\% - x\%$. Notons que 100% vaut la même chose que 1, et que, par exemple, 80% vaut la même chose que 0.80. Donc, la probabilité inverse peut aussi se calculer $1 - 0.80$.

b. La probabilité d'événements disjoints

Si on considère différents événements tous mutuellement exclusifs, comme avoir les cheveux blonds, avoir les cheveux bruns et avoir les cheveux verts. Ces événements sont disjoints en ce sens qu'on ne peut pas avoir les cheveux blonds et verts simultanément. S'il existe une probabilité assignée à chacune de ces situations, on peut connaître la probabilité d'être dans n'importe laquelle de ces situations en additionnant les probabilités des événements individuels. Par exemple, si les probabilités sont de 15%, 65%, et 3% respectivement, la probabilité d'avoir les cheveux blonds, bruns ou verts au total est de 83%. Rappelons qu'une probabilité ne peut jamais dépasser 100%. Si vous arrivez à un nombre plus grand que 1, ou bien il y a une erreur dans votre calcul ou alors les événements ne sont pas disjoints. C'est sans doute ce qui pourrait arriver avec la couleur des cheveux puisque de plus en plus, on peut avoir les cheveux d'une couleur avec des mèches d'une autre couleur.

L'ordre des sections qui suivent respecte l'ordre des tables.

Section 1. Lecture de la table $\mathcal{B}$ Binomiale

a. But de la table

La Table 1 donne la probabilité d'obtenir un certain nombre d'événements dans une suite de Bernoulli. Par exemple, elle peut être utilisée pour connaître la probabilité d'obtenir 10 piles sur 20 essais.

Pour lire la table, il faut connaître deux paramètres: le nombre total d'essais (N) et la probabilité d'obtenir un succès sur un essai particulier (p). Tous les essais doivent être identiques, de telle façon que la probabilité p ne change pas au cours des N essais. De plus, ces deux paramètres doivent être connus *a priori*, c'est à dire avant de collecter l'échantillon.

La table est tabulée pour chaque N (allant de 1 à 20) et p (5%, 10%, 15%, 20%, $\frac{1}{4}$, 30%, 35%, 40%, 45%, et $\frac{1}{2}$). Pour une probabilité de succès p supérieures à $\frac{1}{2}$, interchangez le mot succès avec le mot échec, et utilisez $1 - p$. Elle donne pour chaque valeur r entre 0 et N la probabilité d'obtenir r succès.

Dans l'exemple ci-haut, la probabilité p d'un pile est de $\frac{1}{2}$, le nombre total d'essai est 20, et le nombre de succès recherché est 10, d'où $N = 20$, $p = \frac{1}{2}$ et $r = 10$. En regardant dans la table, on trouve 17.62%. Autrement dit, si 100 personnes lancent 20 pièces de monnaies, on s'attend à ce que près de 18 d'entre elles obtiennent exactement 10 piles.

Pour que la table binomiale soit applicable, il est important que chaque essai soit binaire (succès ou échec), ce qui implique que le nombre total de succès soit un nombre entier. On ne peut pas demander quelle est la probabilité d'obtenir 14,5 succès sur 20 essais.

La table binomiale est la plus longue car elle donne la probabilité pour tous les cas possibles, ce qui permet de dessiner le graphe des fréquences attendus (voir ci-bas). Il en va de même pour la table $\mathcal{N}$. Les autres tables ne donnent que quelques valeurs sur le graphe des fréquences attendues.

Les trois graphes qui suivent donnent la probabilité d'obtenir r succès (sur l'axe horizontal) en fonction de N et de p . Ces valeurs sont directement dans la table, comme on le voit dans la Figure 1.

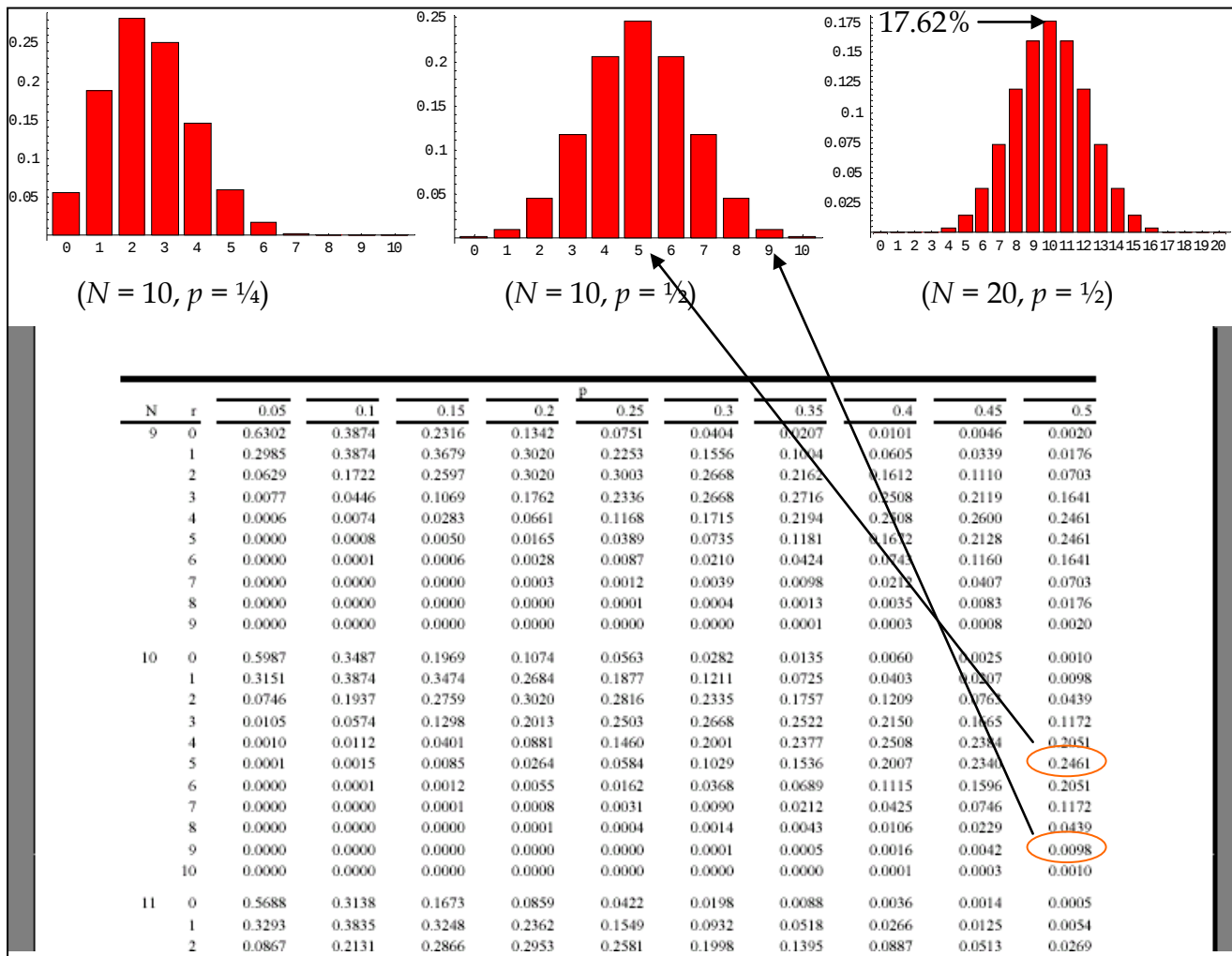


Figure 1 (haut) trois distributions binomiales différentes selon le paramètre p . (bas) Quelques points sur la table binomiale pour les paramètres $N = 10$ et $p = 1/2$.

b. Relation avec un test statistique

Dans un test statistique, on veut connaître la probabilité d'événements rares. Par exemple, si on lance 20 pièces de monnaies, on s'attend à obtenir près de 10 piles. Cependant, on s'attend très peu à obtenir 0 pile. C'est toujours possible, mais extrêmement peu commun.

En règle générale, on décide *a priori* ce qu'on entend par rare en mettant un seuil de décision (tel 5%): sera considéré rare tout résultats qui a moins de 5% de chance de se produire par simple hasard.

Dans le cas d'une suite d'événements binaires, si N et p est connu, on peut choisir quels sont les nombres totaux de succès qui sont rarement obtenus (i.e., obtenus moins de 5% du temps).

Dans le cas de lancers de 10 pièces de monnaies, on voit dans la table ci-haut que la probabilité d'obtenir 0 piles est de 1 sur 1000, effectivement très rare. La probabilité d'obtenir 1 seul pile est de 9.8 sur 1000, proche de 1 sur 100, encore très rare. Par contre, la probabilité d'obtenir 2 piles est de 4.39 sur 100. Une autre façon de voir la chose: Si on refait 1000 fois la

tâche de lancer 10 pièces de monnaies, dans à peu près un cas, on devrait obtenir exactement 0 pile, dans près de 10 cas, on devrait avoir 1 seul pile, et dans près de 44 cas, on devrait obtenir 2 piles.

La probabilité d'obtenir zéro ou 1 seul pile est additive. Elle est donc de 1 sur 1000 plus 9.8 sur 1000 ($0.0010 + 0.0098$), soit 10.8 sur 1000 (0.0108). La probabilité d'obtenir zéro, 1 ou 2 piles est de $0.0010 + 0.0098 + 0.0439$, soit 0.0547 ou un peu plus de 5%. Si dans un test, on cherche un nombre total de succès qui soit rare, et qu'on considère que 5% ou moins de chance de se produire est rare, il faut alors conclure que zéro ou un seul pile sur 10 lancés est un événement rare, mais que de zéro à deux piles est un événement non rare.

c. Exemples

1. Deux parents ayant les yeux bleus ont fondé une famille. Comme le gène de la couleur bleue est un gène récessif, il y a une chance sur quatre qu'un de leur enfant ait les deux gènes de la couleur bleue de ses deux parents et donc qu'il ait effectivement les yeux bleus. Si la famille compte 3 enfants, quelle est la probabilité qu'un seul enfant ait les yeux bleus? que deux des trois enfants aient les yeux bleus? que tous aient les yeux bleus?

Premièrement, on s'assure que la table binomiale est la bonne table puisque ce sont des événements binaires (l'enfant a ou n'a pas les yeux bleus). Il faut ensuite identifier les paramètres N et p . Dans ce cas-ci, ils ont les valeurs 3 et $\frac{1}{4}$ respectivement. Après un regard dans la table, on voit que la probabilité d'exactement 1 succès est de ($r = 1$) 42%, la probabilité de deux enfants aux yeux bleus est de 14.06% et la probabilité de trois enfants aux yeux bleus sur trois est de 1.56%.

2. Si dans l'exemple 1, la famille compte 10 enfants, quelle est la probabilité que deux enfants ou moins aient les yeux bleus? qu'au moins 3 enfants aient les yeux bleus?

La question est semblable à la précédente excepté que maintenant, $N = 10$. De plus, on veut savoir la probabilité d'avoir 2 ou moins, c'est à dire la probabilité d'avoir 0, ou 1 ou 2 enfants aux yeux bleus. Puisque ces probabilités sont additives, nous avons (en arrondissant) $5.3\% + 18.8\% + 28.2\%$, soit près de 52.3% (52.6 pour être exact).

Pour connaître la probabilité d'avoir 3 ou plus, il faut additionner la probabilité d'avoir 3 ou 4 ou 5 ou 6 ou 7 ou 8 ou 9 ou 10 enfants aux yeux bleus, soit $25.0\% + 14.6\% + 5.8\% + 1.6\% + 0.3\% + 0.00\% + 0.00\% + 0.00\%$, soit 47.3% (47.4 pour être exact). Alternativement, on peut faire l'inverse, regarder la probabilité d'avoir 2 ou moins enfants aux yeux bleus (i.e. $r = 0$ ou 1 ou 2), ce qui donne, nous l'avons vu plus haut, 52.6%. Comme avoir 3 enfants aux yeux bleus ou plus est exactement l'inverse d'avoir 2 enfants ou moins aux yeux bleus, on peut utiliser le fait que la probabilité de l'événement inverse est $1 - \text{probabilité d'un événement}$ et calculer $1 - 52.6\%$, ce qui donne 47.4%.

3. On veut tester si une pièce est truquée. On prévoit la lancer 20 fois. Si la pièce est normale, on prévoit obtenir autour de 10 piles. Par contre, si la pièce est truquée pour produire plus de piles, on s'attend à obtenir un nombre anormalement élevé de piles. À partir de combien va-t-on juger que ce nombre est anormalement élevé? On suppose un seuil de décision de 5%, i.e. on cherche un nombre de pile qui devrait se produire par hasard 5% du temps ou moins.

19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
20	0	0.3585	0.1216	0.0388	0.0115	0.0032	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.3774	0.2702	0.1368	0.0576	0.0211	0.0068	0.0020	0.0005	0.0001	0.0000
	2	0.1887	0.2852	0.2293	0.1369	0.0669	0.0278	0.0100	0.0031	0.0008	0.0002
	3	0.0596	0.1901	0.2428	0.2054	0.1339	0.0716	0.0323	0.0123	0.0040	0.0011
	4	0.0133	0.0898	0.1821	0.2182	0.1897	0.1304	0.0738	0.0350	0.0139	0.0046
	5	0.0022	0.0319	0.1028	0.1746	0.2023	0.1789	0.1272	0.0746	0.0365	0.0148
	6	0.0003	0.0089	0.0454	0.1091	0.1686	0.1916	0.1712	0.1244	0.0746	0.0370
	7	0.0000	0.0020	0.0160	0.0545	0.1124	0.1643	0.1844	0.1659	0.1221	0.0739
	8	0.0000	0.0004	0.0046	0.0222	0.0609	0.1144	0.1614	0.1797	0.1623	0.1201
	9	0.0000	0.0001	0.0011	0.0074	0.0271	0.0654	0.1158	0.1597	0.1771	0.1602
	10	0.0000	0.0000	0.0002	0.0020	0.0099	0.0308	0.0686	0.1171	0.1593	0.1762
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0005	0.0030	0.0120	0.0336	0.0710	0.1185	0.1602
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0039	0.0136	0.0355	0.0727	0.1201
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0010	0.0045	0.0146	0.0366	0.0739
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0012	0.0049	0.0150	0.0370
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0013	0.0049	0.0148
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0013	0.0046
	17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011
	18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
	19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Table 1 Binomiale

Figure 2: La fin de la table binomiale

On identifie $N = 20$ et $p = \frac{1}{2}$ si la pièce n'est pas truquée. De plus, on cherche à identifier un nombre élevé de piles, donc des valeurs plus grandes que 10. En commençant par la fin, on additionne les probabilités d'avoir exactement 20 piles sur 20, 19 piles sur 20, etc. jusqu'à ce qu'on arrive à 5% sans le dépasser. On trouve que de 20 à 15 donne ce nombre: $1.48\% + 0.46\% + 0.11\% + 0.02\% + 0.000\% + 0.000\% = 2.07\%$. Si on tente d'inclure 14, la probabilité d'obtenir 14 piles ou plus est de 5.77%, ce qui n'est pas rare (selon la façon dont nous avons choisi de définir "rare" plus haut). Donc, quand vous ferez l'expérience, si vous obtenez 15 piles ou plus, dites-vous que cela est très improbable par pur hasard et que votre pièce de monnaie est peut-être truquée.

Section 2. Lecture de la table N Normale

a. But de la table

La Table 2 donne la probabilité d'obtenir une quantité qui soit moindre qu'une certaine valeur z . Par exemple, elle peut être utilisée pour connaître la probabilité qu'un individu mesure moins que 1m85 (ici, z vaut 1m85).

Pour lire la table, il n'est pas nécessaire de connaître de paramètres. Cependant, il s'agit d'une table donnant des probabilités pour des valeurs *normalisées*, c'est à dire des valeurs qui sont exprimées après avoir enlevé les paramètres de la population. Dans notre exemple, l'individu qui mesure 1m85, après avoir été normalisé, est un individu qui mesure +1. Ici, je suppose que la taille moyenne de tous les humains est de 1m65 et que l'écart type est de 20 cm. La valeur +1 représente une valeur supérieure à la moyenne puisque le signe est positif, et à un écart type de la moyenne. Cette personne est donc à un écart type de la moyenne de la population, ce qui n'est pas excessivement rare.

La table est tabulée pour chaque z (allant de 0 à 4). Elle donne la probabilité de trouver dans la population un individu dont le score est inférieur à z . Comme la distribution normale pour des scores standardisée est symétrique autour de zéro, seul la portion positive est

z	$F_X(z)$	z	$F_X(z)$	z	$F_X(z)$	z	$F_X(z)$	z	$F_X(z)$
0.00	0.5000000	1.00	0.8413447	2.00	0.9772499	3.00	0.9986500	4.00	0.9999683
0.02	0.5079784	1.02	0.8461358	2.02	0.9783084	3.02	0.9987361	4.02	0.9999709
0.04	0.5159535	1.04	0.8508300	2.04	0.9793249	3.04	0.9988170	4.04	0.9999733
0.06	0.5239223	1.06	0.8554277	2.06	0.9803008	3.06	0.9988932	4.06	0.9999755
0.08	0.5318814	1.08	0.8599289	2.08	0.9812373	3.08	0.9989649	4.08	0.9999775
0.10	0.5398279	1.10	0.8643339	2.10	0.9821356	3.10	0.9990323	4.10	0.9999793
0.12	0.5477585	1.12	0.8686431	2.12	0.9829970	3.12	0.9990957	4.12	0.9999810
0.14	0.5556700	1.14	0.8728568	2.14	0.9838227	3.14	0.9991552	4.14	0.9999826
0.16	0.5635595	1.16	0.8769755	2.16	0.9846137	3.16	0.9992111	4.16	0.9999841
0.18	0.5714237	1.18	0.8809998	2.18	0.9853713	3.18	0.9992636	4.18	0.9999854
0.20	0.5792597	1.20	0.8849303	2.20	0.9860966	3.20	0.9993128	4.20	0.9999866
0.22	0.5870644	1.22	0.8887675	2.22	0.9867907	3.22	0.9993590	4.22	0.9999878
0.24	0.5948348	1.24	0.8925122	2.24	0.9874546	3.24	0.9994023	4.24	0.9999888
0.26	0.6025681	1.26	0.8961653	2.26	0.9880894	3.26	0.9994429	4.26	0.9999898
0.28	0.6102612	1.28	0.8997274	2.28	0.9886962	3.28	0.9994809	4.28	0.9999906
0.30	0.6179114	1.30	0.9031995	2.30	0.9892759	3.30	0.9995165	4.30	0.9999915
0.32	0.6255158	1.32	0.9065824	2.32	0.9898296	3.32	0.9995499	4.32	0.9999922
0.34	0.6330717	1.34	0.9098773	2.34	0.9903582	3.34	0.9995811	4.34	0.9999929
0.36	0.6405764	1.36	0.9130850	2.36	0.9908625	3.36	0.9996102	4.36	0.9999935
0.38	0.6480272	1.38	0.9162066	2.38	0.9913437	3.38	0.9996375	4.38	0.9999941
0.40	0.6554217	1.40	0.9192433	2.40	0.9918025	3.40	0.9996630	4.40	0.9999946
0.42	0.6627572	1.42	0.9221961	2.42	0.9922397	3.42	0.9996868	4.42	0.9999951

Figure 3 : Lecture de la table Normale standardisée

donnée dans la table. Dans notre exemple, la probabilité d'être à +1 ou en deçà est de 84.13%. Si vous prenez une personne au hasard, il y a 84.13% de chance qu'elle mesure 1m85 ou moins. Autrement dit, dans la population entière, 84.13% des gens mesurent moins de 1m85.

Pour que la table normale (ou encore table z) soit utilisable, il faut que les éléments de la population se distribuent de façon normale, i.e. qu'il y ait autant de gens sous la moyenne que de gens supérieurs à la moyenne (asymétrie nulle). Une façon de savoir si la population doit être normale est de se demander si le score résulte d'un grand nombre de facteurs, également à même de favoriser un grand ou un petit score. C'est le cas pour la taille des individus qui dépend d'un très grand nombre de facteurs tel l'alimentation, les gènes, etc.

Si on veut connaître la probabilité d'avoir un score supérieur à z, il faut utiliser le fait que la probabilité de l'événement inverse est de $1 -$ la probabilité d'un événement. Donc, la probabilité d'avoir une personne qui mesure 1m85 ou plus est de $1 -$ la probabilité d'avoir une personne qui mesure 1m85 ou moins, soit $1 - 84.13\% = 15.87\%$

Si on veut connaître la probabilité liée à des événements se trouvant en bas de la moyenne (dont le score normalisé est plus petit que zéro), il faut utiliser (a) la probabilité inverse comme dans le paragraphe ci-haut, et (b) le fait que la distribution normale soit symétrique autour de zéro. Par exemple, la probabilité de trouver une personne qui mesure 1m45 ou moins. Après normalisation, on trouve que 1m45 équivaut à -1 (1m45 - 1m65)/0m20. La probabilité d'être en deçà de -1 est la même que la probabilité d'être au delà de +1 (symétrie). Donc, la probabilité de mesure moins de 1m45 est la même que la probabilité de mesurer plus de 1m85. Par inversion, la probabilité de mesure plus de 1m85 est 1 moins la probabilité de mesurer moins de 1m85, soit $1 -$ probabilité d'être en deçà de +1, soit 84.13%. Le résultat est donc $1 - 84.13\%$, soit 15.87%.

La table z donne tous les points le long de la courbe comme on le voit dans la Figure 4:

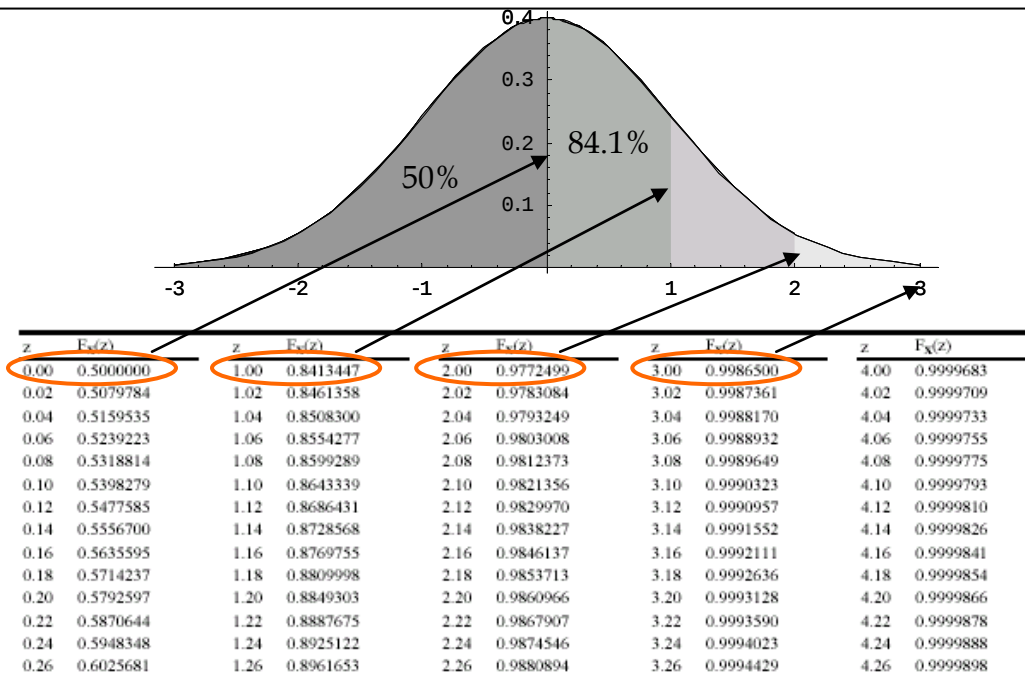


Figure 4 : l'aire sous la courbe d'une normale standardisée

b. Exemples

- Supposant que la taille des êtres humains au Québec soit en moyenne de 1m65 avec un écart type de 0m20, quelle est la probabilité d'observer un individu mesurant plus de 1m98? Si vous collectez un échantillon de 1000 personnes, combien devrait mesurer plus de 1m98? Est-ce une taille rare dans la population?

La taille 1m98, après normalisation, représente la taille +1.65. La probabilité d'observer quelqu'un de taille inférieure à +1.65 est d'environ 95% selon la table z. Donc, la probabilité d'observer quelqu'un de taille supérieure est de $1 - 0.95$ (événement inverse), soit 5%. Sur mille personnes, on s'attend à en observer 50 de tailles supérieures à 1m98. Tout dépendamment comment on choisit de définir "rare", mais si on choisit 5%, être plus grand que 1m98 est effectivement un événement rare.

- Supposons qu'un chercheur ait inventé une pilule pour faire grandir. Il sélectionne deux groupes de 20 enfants de 10 ans, comparable selon leur taille, statut socio-économique, etc. À un groupe, il prescrit cette pilule pour les 8 prochaines années alors qu'à l'autre groupe, il prescrit une pilule identique, mais ne contenant que du sucre. 8 ans plus tard, il observe les deux groupes. Dans le groupe avec du sucre, il trouve une personne mesurant plus de 1m98. Est-ce un nombre raisonnable? Va-t-on conclure que le sucre fait grandir?

Informellement, on trouve dans l'échantillon une personne sur 20 mesurant plus de 1m98, soit 5%. C'est exactement ce qui est prédit par la population du Québec. C'est donc parfaitement raisonnable. Il n'y a aucune raison de donner un rôle au sucre dans cette situation.

Si on veut aller plus loin, on peut noter qu'ici, le chercheur a l'air de considérer une personne mesurant plus de 1m98 comme un succès. Il a mesuré 20 personnes, et la probabilité d'un succès prédit par la table z est de 5%. Quelle est la probabilité de mesurer exactement 1 et un seul succès sur 20 essais? Il s'agit ici d'un argument du type "essais de Bernoulli", et effectivement, la table binomiale s'applique parfaitement. En regardant dans la Table 1, avec $N = 20$ et $p = 5\%$, on trouve que la probabilité d'avoir exactement un succès est de 37.7%. Autrement dit, le chercheur avait près d'une chance sur trois de mesurer un individu de plus de 1m98 dans un groupe de 20 dans la population ordinaire. Son groupe de sujet est donc très semblable à la population.

3. Dans le second groupe, il trouve 4 personnes mesurant plus de 1m98. Est-ce un nombre raisonnable? Va-t-on conclure que sa pilule fait grandir?

Ca n'a pas l'air très raisonnable. On s'attend grosso modo à une personne de plu de 1m98. Par simple fluctuation aléatoire, on peut bien en avoir 2, peut-être 3, mais 4? Peut-être que la pilule fonctionne dans ce groupe?

Le problème, c'est qu'on ne sait pas s'il s'agit d'un événement rare. Il faut donc quantifier la probabilité d'avoir 4 individus sur 20 de plus de 1m98. Comme précédemment, on va utiliser la table binomiale. Soit un succès un individu mesurant plus de 1m98. Dans la population normale, la probabilité d'un succès est de 5%. Dans l'échantillon du chercheur, il observe 4 succès sur 20. Posons $N = 20$ et $p = 5\%$. Après un regard dans la table 1, on trouve que la probabilité d'avoir exactement 4 succès dans cette situation est de 1.33%. Il s'agit donc d'une situation rare. Se retrouver avec quatre "géants" dans un groupe de 20 par pur hasard peut toujours se produire, mais de façon exceptionnelle. Qu'est-ce qui est le plus raisonnable ici: Que notre échantillon est exceptionnellement improbable ou que la pilule fonctionne?

4. Un prospecteur d'or va dans le grand Nord québécois et fait différent prélèvement de sol pour examiner l'importance de la présence de ce précieux métal dans le perlegisol. Il trouve une quantité de 75 mg par mètre cube de terre. Est-ce une quantité importante? Tout dépend combien il y a d'or dans un sol ordinaire. En effet, il y a des atomes d'or à grandeur de la planète. Le prospecteur sait que pour un sol sans aucun gisement, la quantité moyenne d'or est de 40 mg par mètre cube avec un écart type de plus ou moins 20 mg par mètre cube. Est-ce que 75 est une quantité exceptionnellement élevée?

Premièrement, il faut se demander si la quantité d'or dans un sol sans gisement suit une distribution normale (sinon, nous ne pourrions pas utiliser la table z). Il semble plausible de penser que la répartition des atomes d'or sur la planète dépend d'une foule de facteurs, telle les éruptions volcaniques, les vents, l'érosion, etc. Les éruptions volcaniques vraisemblablement ajoutent en plus d'une grande quantité de minéraux, des traces d'or alors que l'érosion entraîne ces mêmes atomes vers les fleuves. Il y a donc plusieurs facteurs, favorables et défavorables. Ce raisonnement implique que la quantité d'atome d'or suit probablement une distribution normale. Ce point établi, on va normaliser la quantité 75 mg par mètre cube: $(75 \text{ mg par mètre cube} - 40 \text{ mg par mètre cube}) / 20 \text{ mg par mètre cube}$ donne 1.75 (toutes les unités de mesures disparaissent par la division). Le signe est positif. Il s'agit donc d'un résultat supérieur à la moyenne. Après un regard sur la table z, on trouve que la probabilité d'obtenir un score inférieur ou égal à 1.75 est de proche de 96%. Donc, trouver 75 mg par mètre cube d'or dans un sol sans gisement est peu probable par simple hasard (4%). Il y a peut être un gisement d'or dans ce terrain. Est-ce un gisement intéressant?

5. Le prospecteur est content. Cependant, avec les moyens d'extraction actuels, si le terrain possède moins de 100 mg d'or par mètre cube, ça ne vaut pas la peine d'exploiter le filon. Est-ce possible, considérant qu'une mesure est toujours imprécise, que le 75 mesuré provienne d'un terrain intéressant (possédant 100 mg ou plus d'or par mètre cube)?

Supposons que le terrain contienne 100 mg d'or par mètre cube. Quelle est la probabilité d'observer 75 lorsque le prospecteur a fait son relevé? Commençons par normaliser la valeur 75 en postulant que le terrain est riche: $(75 \text{ mg d'or par mètre cube} - 100 \text{ mg d'or par mètre cube}) / 20 \text{ mg d'or par mètre cube} = -1.25$. Le signe négatif indique que nous sommes sous la moyenne (ce que nous savions déjà). Est-ce exceptionnellement sous la moyenne? Un regard dans la table z va nous dire que non. Pour savoir la probabilité d'obtenir -1.25 ou moins, il faut utiliser le fait que la table z est symétrique autour de zéro et chercher la probabilité d'obtenir plus que $+1.25$. La table z nous indique que 89.4% est la probabilité d'avoir moins de $+1.25$. L'événement inverse (avoir plus de $+1.25$) a donc une probabilité de 10.6%. Il s'agit de la réponse cherchée. Quand un sol est riche (ayant tout juste 100 mg), il y a 10% de chance que le relevé indique 75 mg.

6. Est-ce possible que le terrain ait une teneur exceptionnelle en or, de l'ordre de 200 mg par mètre cube?

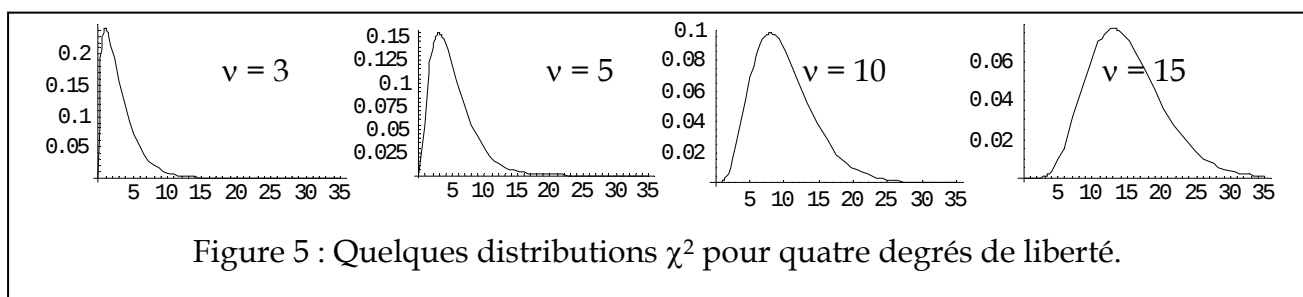
Absolument impossible. Si le sol contient 200 mg, la probabilité que notre mesure donne 75 par pur hasard est infime. Pour s'en convaincre, normalisons en postulant que le terrain contient en moyenne 200 mg d'or par mètre cube: $(75 \text{ mg par mètre cube} - 200 \text{ mg par mètre cube}) / 20 \text{ mg par mètre cube} = -6.25$. La table z ne se rend pas jusque là. Cependant, la probabilité d'obtenir la valeur -4.98 ou moins est de 3 sur dix millions. Pour être très exact, je ne peux pas dire "absolument impossible" car il existe toujours une chance infime de mesurer 75 par pur hasard dans un sol très riche, mais c'est "virtuellement impossible".

Section 3. Lecture de la table χ^2

a. But de la table

La Table 3 donne la probabilité d'obtenir une quantité qui soit moindre qu'une certaine valeur z. Pour que la table soit applicable, il faut que la quantité soit le résultat d'une somme d'écarts normalisés au carré. Il s'agit de quantités un peu particulières, et on les utilise uniquement dans des tests statistiques.

Pour lire la table, il est nécessaire de connaître un paramètre. Ce paramètre s'écrit généralement avec la lettre grecque ν (nu) et s'appelle "le degré de liberté". Voici quelques distributions de χ^2 pour quelques valeurs de ν , comme on le voit dans la Figure 5.



Puisqu'il faudrait une table par degré de liberté pour avoir le même format que la table z précédente, on préfère généralement ne donner que quelques points sur la distribution. Ces points sont la valeur z telle que la probabilité d'avoir moins que z soit de 0.5%, 1%, 2.5%, 5% et 10% pour les valeurs z sous la moyenne, et 90%, 95%, 97.5%, 99% et 99.5% pour les valeurs z supérieures à la moyenne. Par exemple, la Figure 6 montre une distribution de χ^2 avec 15 degrés de liberté qui montre les valeurs z tel que 1%, 5%, 95% et 99% des valeurs possibles lui soient inférieures:

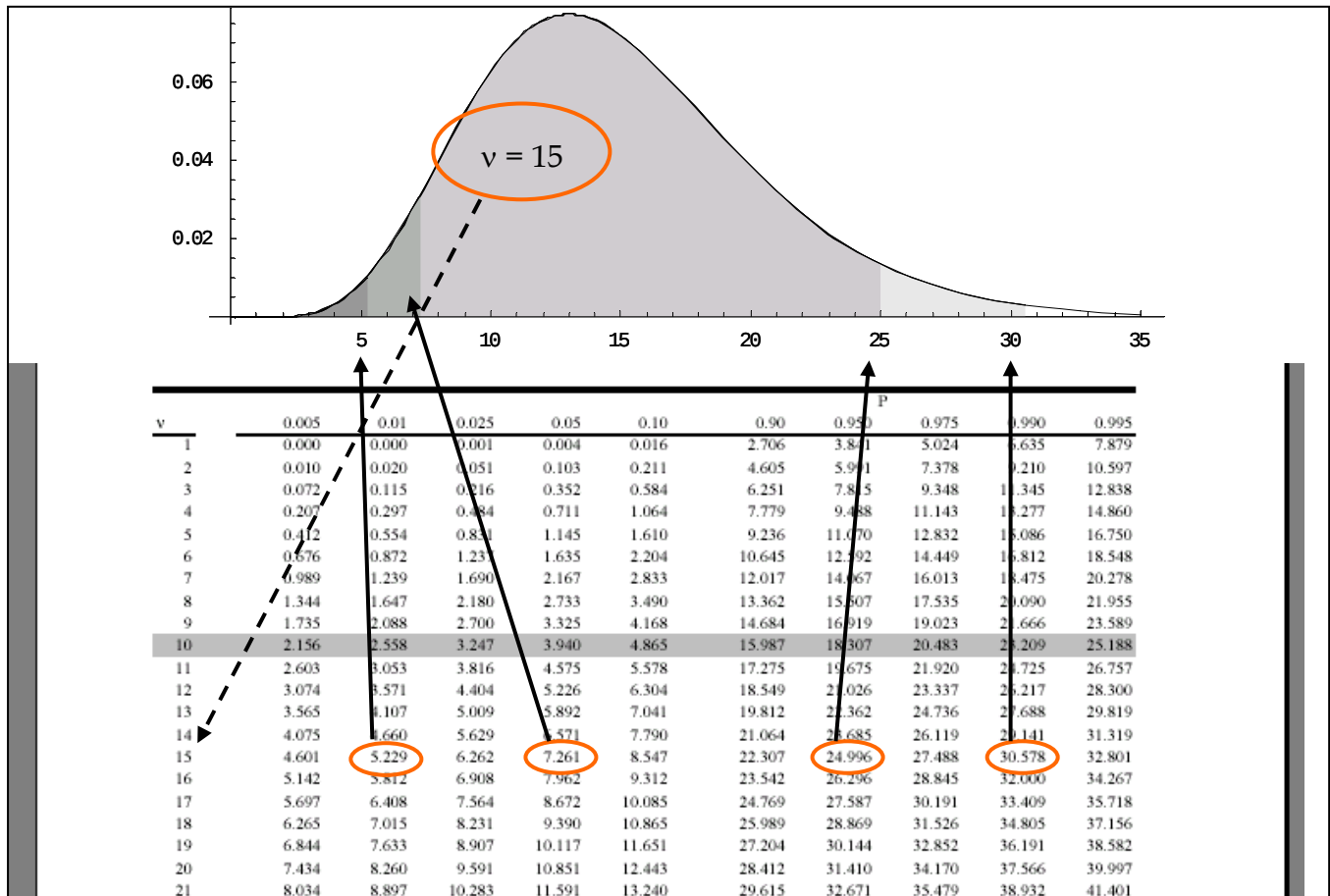


Figure 6 : La distribution χ^2 et quelques points selon la valeur critique et la direction de l'hypothèse

En utilisant la probabilité inverse, on voit que si les degrés de liberté sont de 15, la probabilité d'avoir un score χ^2 supérieur à 25 est faible (moins de 5%).

b. Exemples

1. Un chercheur réalise une expérience et obtient, après de savants calculs, une valeur qui résume son expérience de 45.0. Le calcul qu'il a réalisé est une somme d'écarts normalisés au carré. Est-ce que ce résultat est surprenant?

Il n'y a aucune façon de le dire. Pour décider si une valeur de type χ^2 est grande ou petite, il faut absolument connaître le nombre de degrés de liberté. Pour avoir une idée, une distribution χ^2 avec

15 degrés de liberté donne un résultat moyen de 15, une distribution χ^2 avec v degrés de liberté donne un résultat moyen de v . Ainsi, si le chercheur avait eu 45 degrés de liberté dans son calcul, son résultat aurait été tout ce qu'il y a de commun.

2. Ce même chercheur, se rendant compte de son oubli, précise qu'il a 70 degrés de liberté. Est-ce que le résultat (45.0) est surprenant?

En regardant dans la table χ^2 , on voit qu'un résultat rare (i.e. qui n'arrive que dans 5% des cas) est un résultat inférieur à 51.739. Comme le chercheur a obtenu encore plus petit, son résultat est effectivement surprenant. Il a très peu de chance d'obtenir ce résultat par pur hasard.

Si on répartit le 5% de chaque côté (2.5% du côté des petites valeurs et 2.5% du côté des grandes valeurs), on voit qu'un résultat non rare (qui devrait avoir lieu par pur hasard 95% du temps) est un résultat se trouvant entre 48.578 et 95.023. Comme on peut le voir, la table du χ^2 n'est pas symétrique. Pour cette raison, il faut donner les probabilités pour les petites valeurs séparément des probabilités pour les grandes valeurs.

Section 4. Lecture de la table $\mathcal{F}$ de Fisher

a. But de la table

La Table 4 donne la probabilité d'obtenir une quantité qui soit moindre qu'une certaine valeur z . Pour que la table soit applicable, il faut que la quantité soit le résultat d'une division entre deux sommes d'écarts normalisés au carré. Il s'agit de quantités un peu particulières, et on les utilise uniquement dans un test statistique, l'ANOVA.

Pour lire la table, il est nécessaire de connaître deux paramètres. Ces paramètres s'écrivent généralement avec les lettres v_1 et v_2 et s'appellent "les degrés de liberté du numérateur et du dénominateur" respectivement. En règle générale, v_1 est plus petit que v_2 .

Pour tracer la courbe au complet, il faudrait une table pour chaque paire de valeurs possible v_1 et v_2 , ce qui est impossible. Même pour ne donner que quelques points (tels 0.5%, 1%, 2.5%, 5%, 10%, 90%, 95%, 97.5%, 99% et 99.5%), la table serait gigantesque. On se limite donc à un seul point sur la courbe, le point z tel que 5% des valeurs possibles lui sont supérieures.

Notons que la table $\mathcal{F}$ est toujours utilisée dans des tests unicaudaux. Ce qui signifie qu'on cherche toujours à trouver si une valeur grande est rare ou commune. Pour les valeurs petites (proches de zéro), on ne cherche pas à savoir s'ils sont surprenants.

La Figure 7 montre quelques distributions de Fisher pour quelques valeurs de v_1 et v_2 et où se trouvent ces valeurs sur la table:

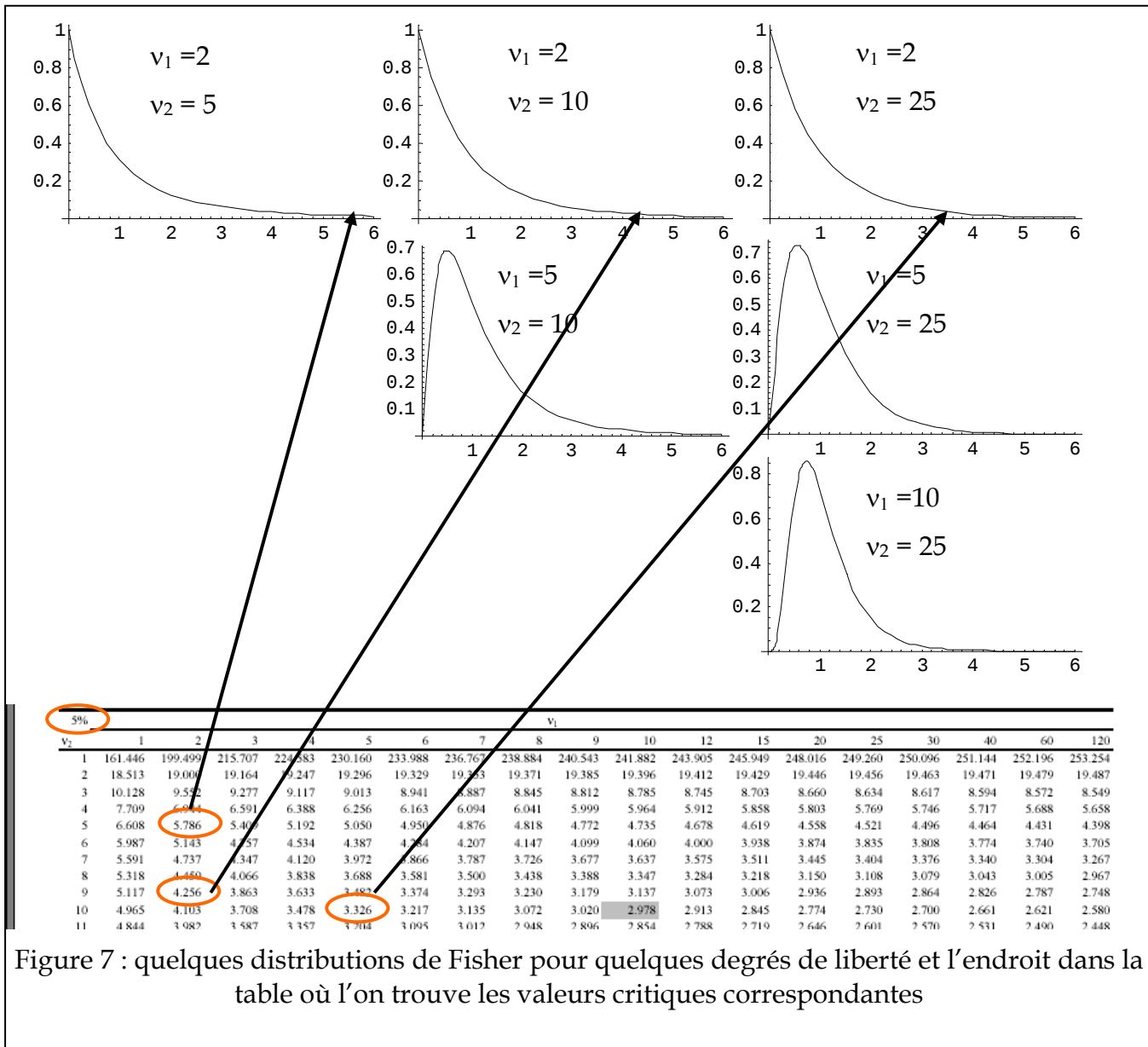


Figure 7 : quelques distributions de Fisher pour quelques degrés de liberté et l'endroit dans la table où l'on trouve les valeurs critiques correspondantes

Le 5% en haut de la table indique que la table retourne la valeur z telle que 5% des valeurs possibles seront supérieures à ce point. Il s'agit en fait de la probabilité inverse, contrairement à ce que l'on retrouve dans les autres tables.

b. Exemples

1. Un chercheur, après avoir réalisé un calcul complexe, obtient un résultat qu'il sait se distribuer comme la distribution de $\mathcal{F}$. La valeur qu'il a obtenue est de 2.0. Est-ce que cette valeur est grande? Est-ce rare d'obtenir une valeur aussi grande?

Comme la distribution de $\mathcal{F}$ provient toujours d'un ratio de deux valeurs qui devraient être identique, le résultat le plus plausible est 1. Ici, nous avons une valeur légèrement supérieure à 1. Est-ce nettement différent de 1? Pour le savoir, il faut absolument avoir les degrés de liberté.

2. Le chercheur, décidément distrait, précise que les degrés de liberté du numérateur (v_1) sont de 10, mais qu'il a égaré les degrés de liberté du dénominateur. À partir de quels degrés de liberté la valeur 2 devient-elle surprenante?

Pour 40 degrés de liberté, toute valeur allant jusqu'à 2.077 peut arriver assez fréquemment (95% du temps par simple hasard). À partir de 60 degrés de liberté, les valeurs fréquentes s'étendent de zéro à 1.993. Si le chercheur a obtenu une valeur rare (obtenus dans moins de 95% des cas par simple hasard), c'est qu'il a plus de 40 degrés de liberté, le nombre exact n'étant pas possible à déterminer avec la table qui passe de 40 à 60 degrés de liberté...

Section 5. Lecture de la table t de Student

a. But de la table

La table t ressemble en partie à la table du χ^2 et en partie à la table $\mathcal{N}$. Comme la table du χ^2 , la distribution dépend d'un degré de liberté. On ne donne alors que quelques points le long de la courbe. Cependant, comme la distribution normale, la distribution t est symétrique autour de zéro, ce qui implique qu'il n'est pas nécessaire de donner les points pour les valeurs plus petites que zéro.

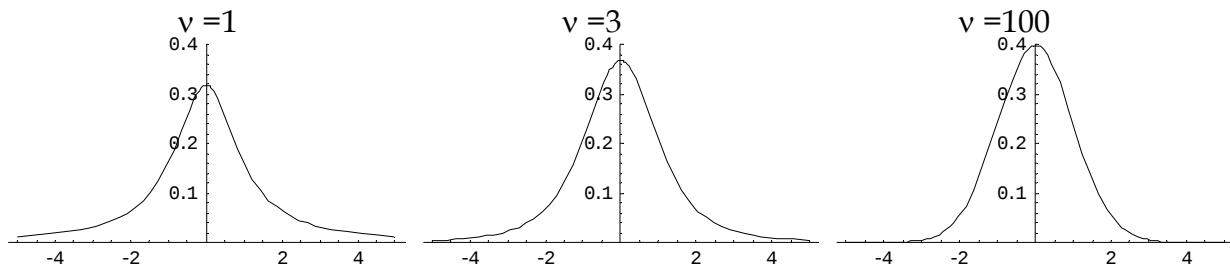


Figure 8 : Quelques distributions de Student pour trois degrés de liberté.

La Figure 8 montre la forme de la distribution de t pour quelques degrés de liberté:

Pour plus de 100 degrés de liberté, la distribution ressemble à la distribution normale.

Pour calculer la probabilité d'avoir une grande valeur, utiliser la probabilité inverse, comme dans les exemples de la Figure 9.

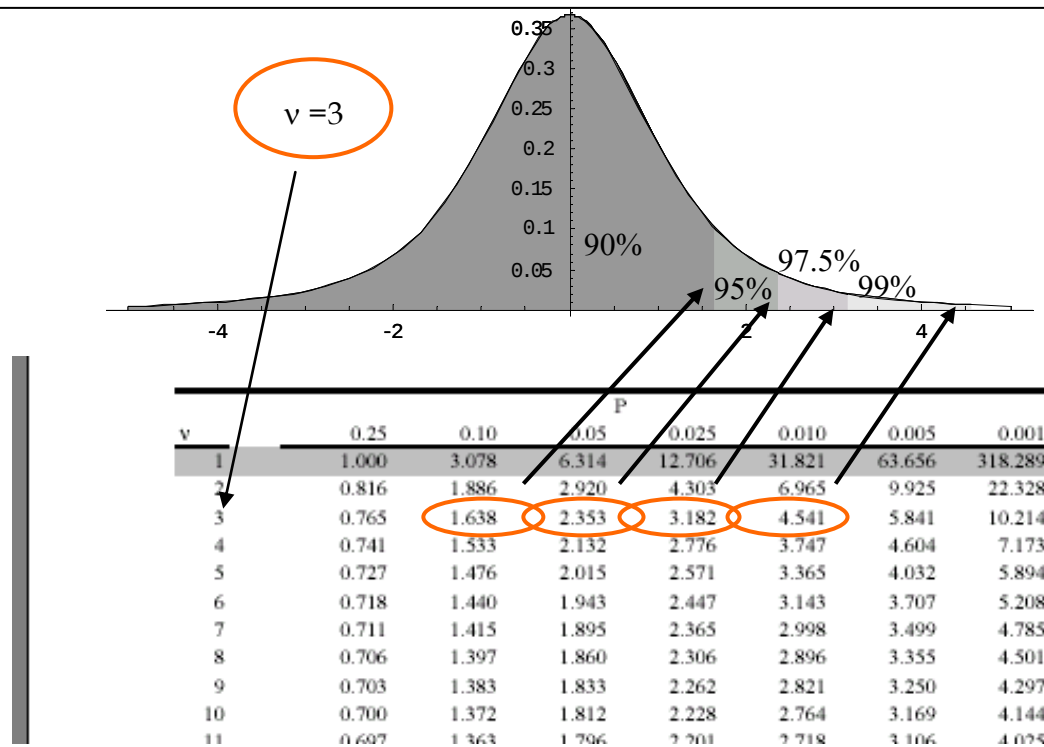


Figure 9 : Distribution de Student et quelques valeurs critiques selon le seuil α choisi.

b. Exemples

1. Un chercheur examine la taille des pygmées d'Asie occidentale. Cependant, il sait que la taille de ces individus n'est pas normalement distribuée (pour une raison technique) mais suit plutôt une distribution t . Quelle est la probabilité qu'il observe un échantillon dont la taille moyenne soit de 2m00 si la taille moyenne de cette population est de 1m40 et l'écart type de 0m20?

Tout comme pour la distribution normale, il est possible de normaliser le score de 2m00: $(2m00 - 1m40) / 0m20$ donne +3. Est-ce que +3 est un score rare à obtenir sur une distribution t ? Tout dépend de ce qu'on entend par "rare" et du nombre de degrés de liberté. Supposons que le chercheur choisi 5% (toute valeur qui a moins de 5% de chance de se produire par pur hasard est une valeur hors du commun). Si le nombre de degrés de liberté est de 1, la valeur +3 n'est pas du tout rare puisque sont considérées rares les valeurs supérieures à 6.314. Si on répartit le 5% également pour les valeurs négatives et positives (2.5% à gauche et 2.5% à droite), et tenant compte du fait que la distribution est symétrique autour de zéro, on voit qu'un score non rare est un score entre -12.706 et +12.706.

Cependant, si le chercheur a un nombre de degrés de liberté de 20, la situation change complètement: Sont rares les événements inférieurs à -2.086 et supérieurs à +2.086. Dans ce cas, obtenir un résultat de +3 part simple hasard est excessivement improbable. S'il change sa définition de rare pour une définition encore plus restreinte: sera considéré comme rare les événements excessivement improbables, qui n'ont une chance d'arriver par hasard qu'une fois sur mille (seuil de 0.1%), à ce moment, obtenir un score de +3 n'est pas totalement impossible et ne sera pas considéré comme "rare". Dans ce cas, seront considérés comme rares les scores supérieurs à +3.552.

Section 6. Tables avec un format unique

Les choses seraient beaucoup plus faciles si toutes ces tables avaient un format unique. Pour donner une idée à quoi ressemblerai cette table, je reproduit dans le Tableau de résumé ci-bas des segments des Tables 2 à 5, toutes dans un format unique.

Ce tableau est sans doute plus compréhensible. Cependant, il est beaucoup plus limité. Il ne contient que les valeurs critiques, et ce, uniquement pour le seuil de décision de 5%. Par contre, il différencie la valeur critique pour un test unidirectionnel à droite (une hypothèse alternative du genre $H_1 : \mu < \text{valeur}$, ou encore $H_1 : \mu_1 < \mu_2$), la valeur critique pour un test unidirectionnel à gauche (pour une hypothèse du genre $H_1 : \mu > \text{valeur}$, ou encore $H_1 : \mu_1 > \mu_2$) et la valeur critique pour un test bidirectionnel (pour une hypothèse du genre $H_1 : \mu \neq \text{valeur}$, ou encore $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$).

À l'exception de la table N , toutes les autres nécessitent de connaître un « degré de liberté » (deux dans le cas de la table $\mathcal{F}$). Les degrés de liberté sont un indicateur du nombre de données dans l'échantillon.

Comme vous le voyez, les tables N et t sont symétriques autour de zéro, ce qui fait que les valeurs critiques à droite et à gauche sont les mêmes à un signe près. Il en va tout autrement pour la table du χ^2 . La distribution du χ^2 a comme moyenne, non pas zéro comme les deux précédentes, mais ν , la valeur du degré de liberté. Finalement, la table $\mathcal{F}$ est uniquement utilisée pour un test unidirectionnel.

Le Tableau de résumé n'est pas complet, mais seulement donné à titre d'indication. Pouvez-vous à partir des Tables originales (2 à 5) retrouver les valeurs contenues dans le Tableau de résumé?

Tableau de résumé des valeurs critiques pour les Tables 2 à 5,
avec un seuil de décision de 5%, en fonction du (des) degré de liberté ν .

		Direction du test statistique			
		Unidirectionnel	Unidirectionnel		
Table		à gauche	à droite	Bidirectionnel	
N	Normale standardisée				
	ν				
	n/a	-1.64	+1.64	-1.96	+1.96
t	Student				
	ν				
	1	-6.31	+6.31	-12.71	+12.71
	2	-2.92	+2.92	-4.30	+4.30
	3	-2.35	+2.35	-3.18	+3.18
	...	...	...	...	...
	100	-1.66	+1.66	-1.98	+1.98
χ^2	Chi-carré				
	ν				
	1	0.004	3.841	0.001	5.024
	2	0.103	5.991	0.051	7.378
	3	0.352	7.815	0.216	9.348
	...	...	...	...	...
	100	77.929	124.342	74.222	129.561
$\mathcal{F}$	Fisher				
	ν_1 ν_2				
	1 1		161.446		
	1 2		18.513		
	1 3		10.128		
	1 ...		...		
	1 120		3.920		
	2 1		199.499		
	2 2		19.000		
	2 3		9.552		
	2 ...		...		
	2 120		3.072		
	...		...		